ÉLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE PRATIQUE,

Par M. Dupuy fils, Aide-Professeur aux Écoles Royales de l'Artillerie de Grenoble, & Professeur Royal en survivance.

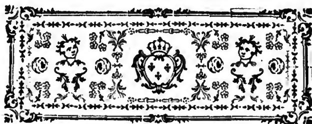
TOME PREMIER.





A GRENOBLE,
Chez François Brette, Libraire, Place Saint-André.

M. DCC. LXXIV.
Avec Approbation & Privilege du Roi.



AU

CORPS-ROYAL

DE

L'ARTILLERIE DE FRANCE.

MESSIEURS,

Daignez accepter l'hommage que je vous rends, en vous présentant cet Ouvrage. Il est le fruit des observations

de mon pere sur une partie qui jusqu'à ce jour avoit été très-négligée. Vous avez paru le desirer, MESSIEURS, & ce desir a été un ordre pour moi de l'entreprendre. Si vous le regardez d'un œil favorable, si vous trouvez que j'ai rempli votre objet, j'aurai reçu la récompense la plus flatteuse que mon travail eût pu me promettre.

J'ai l'honneur d'être avec le plus profond respect,

MESSIEURS,

Votre très-humble & très-obéissant serviteur,

DUPUY fils.

APPROBATION.

J'Ai lu par ordre de Monseigneur le Chancelier, & approuvé bien volontiers, *Les Éléments de la Géométrie Pratique*, par M. Dupuy fils, Aide-Professeur aux Écoles Royales de l'Artillerie de Grenoble, & Professeur Royal en survivance. Les difficultés multipliées & vaincues dans cet Ouvrage assez étendu, témoignent également l'habileté & les grandes ressources de l'Auteur. A Paris, le 16 avril 1774.

Signé L'ABBÉ DE LA CHAPELLE.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France et de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maître des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Conseils supérieurs, Prévôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenants Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra ; Salut. Notre amé le Sieur Dupuy fils, Aide-Professeur à nos Ecoles d'Artillerie de Grenoble, & Professeur Royal en survivance, Nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage qui a pour titre : *Les Éléments de la Géométrie Pratique*, de sa composition, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Permission pour ce nécessaires. A ces causes, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces présentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le temps de *trois années consécutives*, à compter du jour de la date des présentes. *Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance* : à la charge que ces présentes seront enrégistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression

dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres : que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglements de la Librairie, & notamment à celui du 10 avril 1725, à peine de déchéance de la présente Permission ; qu'avant de l'exposer en vente, le Manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier, Garde des Sceaux de France, le Sieur DE MAUPEOU ; qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit Sieur DE MAUPEOU : le tout à peine de nullité des présentes ; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayants cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie des présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le vingt-cinquieme jour du mois de mai, l'an mil sept cent soixante-quatorze, & de notre regne le premier. Par le Roi en son Conseil. *Signé* LE BEGUE.

Registré sur le Registre dix-neuf de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N.° 2941, fol. 257, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenses, article 4, à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement ; & à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires prescrits par l'article 108 du même Réglement. A Paris, ce 27 mai 1774.

Signé C. A. JOMBERT pere, *Syndic.*

TABLE

De ce qui eſt contenu dans ce Volume.

LIVRE PREMIER.

LIVRE SECOND.



PRÉFACE.

Depuis plus d'un ſiecle, les progrès des Mathématiques ont été rapides. Cette ſcience, dans ſes parties ſublimes, excitoit la curioſité des génies les plus profonds; auſſi les découvertes les plus riches furent le fruit de l'application des grands hommes. Mais les progrès de la théorie n'ont pas été ſuivis de ceux de la pratique. Dès que les opérations ſont néceſſaires, dès qu'il faut allier à une patience lente & réfléchie, des expériences réitérées; le dégoût qui vient ordinairement s'y joindre, nous fait bientôt abandonner des découvertes utiles, mais peu ſatisfaiſantes. Auſſi

cette partie ſi néceſſaire à la ſociété, & qui ſe trouve liée par tant de rapports à la fortune des citoyens, a-t-elle été juſqu'à ce jour très-négligée ; des abus ſans nombre ſe ſont gliſſés dans l'art de la menſuration. Oſerois-je le dire ! dans ce ſiecle éclairé, ces mêmes abus ſubſiſtent ; & la menſuration dépend du caprice & du préjugé de l'ignorance. L'art de fixer les poſſeſſions des citoyens, eſt confié à des hommes qui ignorent quelquefois la définition d'un angle. Il ſeroit trop long d'entrer dans les détails des erreurs qui ſe commettent chaque jour dans cette partie : nous aurons occaſion d'en dire quelque choſe dans le cours de cet Ouvrage. La plupart des Problêmes & des Obſervations qu'il renferme, m'ont été communiqués par mon pere. Qu'il m'eſt

doux de lui rendre publiquement le témoignage de mon profond respect, de ma tendresse & de ma reconnoissance !

CET Ouvrage est divisé en deux volumes. Le premier contient les principes de l'Arithmétique & de la Géométrie Elémentaire. Je le termine par le Toisé, auquel j'ai ajouté une Table qui facilite prodigieusement le toisé des solives, ou la réduction en pieds-cubes. Cette Table est calculée sur le rapport de 113 à 355. Je laisse au Lecteur à décider si elle est plus commode & plus simple que celle de M. de Bélidor.

COMME notre objet est d'enseigner l'art de mesurer les terres, nous avons donné la Géométrie Théorique, d'une maniere analogue à ce

projet. Au moyen de peu de principes, nous parvenons à démontrer toutes les propoſitions de la Géométrie Elémentaire qui ſervent de baſe aux applications ſur le terrein. Il ſeroit peut-être difficile de plus abréger la théorie, dans l'Arithmétique & la Géométrie.

Le ſecond volume eſt composé de cinq Chapitres. Le prémier comprend l'uſage des piquets, pour déterminer les longueurs acceſſibles ou inacceſſibles, & les ſurfaces. Il renferme auſſi le moyen de rapporter ſur le terrein toutes ſortes de figures. Les Militaires y trouveront la maniere de conſtruire les forts à étoile, toutes ſortes de fortifications, & quantité d'opérations relatives à leur état.

Le ſecond Chapitre renferme

l'usage de l'Equerre d'Arpenteur ; & nous le terminons par l'usage de l'Equerre brisée. Il contient aussi l'usage d'un Instrument de notre invention, qui donne sans calcul les deux côtés d'un triangle vertical ou horizontal.

Le Chapitre troisieme renferme l'usage du Graphometre, sans calcul, & par le moyen du calcul. Cette derniere maniere de se servir du Graphometre est précédée d'une Trigonométrie que nous avons traduite de l'Anglois de M. Simpson.

Le Chapitre quatrieme renferme l'usage de la Planchette & celui de l'Altimetre de mon pere. Nous lui avons donné toute l'étendue qu'il mérite ; l'on y trouvera le pied d'une nouvelle Planchette qui accélere prodigieusement les

opérations, & dont nous nous ſervons depuis long-temps avec le plus grand ſuccès. Il contient auſſi quantité de Problêmes curieux, qu'il ſeroit inutile de rapporter.

Le Chapitre cinquieme renferme le Nivellement. Nous nous ſommes attachés à développer d'une maniere claire la théorie de cet art. Nous donnons dans la pratique du Nivellement deux méthodes qui nous ont paru les plus ſimples & les plus expéditives. Ce Chapitre comprend auſſi de nouveaux procédés pour la conſtruction des reliefs. Enfin nous le terminons par pluſieurs Problêmes curieux & utiles, qui ont rapport à la conſtruction des terraſſes & chauſſées. Nous donnons de ſuite la conſtruction & l'uſage de la Bouſſole. Enfin nous

terminons tout l'Ouvrage par un Mémoire qui renferme la méthode de conſtruire les cadaſtres, & quelques obſervations ſur les limites.

Ce dernier Mémoire merite à tous égards l'attention du Lecteur ; nous n'avons rien négligé pour prouver l'importance de ces ſortes d'ouvrages, & de quelle maniere nous deſirerions qu'ils fuſſent faits. Notre objet ſeroit aſſez rempli, ſi le Miniſtere daignoit jeter un coup d'œil ſur nos obſervations, & réprimoit les abus ſans nombre qui ſe commettent tous les jours.

Tel eſt le plan de l'Ouvrage que nous préſentons au public. D'après cet expoſé, l'on jugera facilement qu'il manquoit en quelque ſorte à la Géométrie Elémentaire.

TOUTES les opérations renfermées dans cet Ouvrage, ont été exécutées nombre de fois ſur le terrein, & dans les poſitions les plus déſavantageuſes. En un mot, nous ne parlons que d'après l'expérience la plus ſuivie & la plus réfléchie.



ÉLÉMENTS



ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE ET DE GÉOMÉTRIE.



LIVRE PREMIER.

Principes d'Arithmétique.



L'ARITHMÉTIQUE eſt la ſcience des nombres ; un *nombre* eſt l'aſſemblage de pluſieurs unités ; une *unité* eſt le terme de comparaiſon de toutes les quantités de même eſpece. Rendons cette derniere propoſition plus ſenſible.

Suppoſons que deux objets ſoient éloignés l'un de l'autre de quatre lieues ; le mot *lieue*, qui exprime une meſure reçue, eſt ici l'unité que l'on conſidere, ou le terme de comparaiſon ; & l'on ne ſe forme

une idée juſte de la diſtance qui ſépare ces deux objets, qu'en ſe repréſentant *quatre fois* la premiere meſure reçue.

De même, dit-on, que deux objets ſont éloignés l'un de l'autre de quarante-cinq toiſes; la grandeur reçue, *une toiſe*, qui eſt dans cet exemple le terme de comparaiſon, ſert à ſe former une idée de *quarante-cinq toiſes*. Les mêmes obſervations doivent ſe faire ſur les poids, les monnoies, &c.

En général, une ſomme de *meſure* étant donnée, l'on ne ſe forme l'idée de cette ſomme que d'après l'*unité* qui ſert à la comparer; & cette *unité* eſt toujours de convention.

Toute l'Arithmétique eſt fondée ſur ces quatre regles: *Addition*, *Souſtraction*, *Multiplication* & *Diviſion*. Mais avant d'enſeigner la méthode de réſoudre ces queſtions, il nous faut entrer dans quelques détails ſur la numération.

L'on ſe ſert de différents caracteres pour déſigner *une unité*, & l'aſſemblage de *pluſieurs unités*. Ces caracteres ſont les ſuivants: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; & ſe prononçent: *zéro*, *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *ſix*, *ſept*, *huit* & *neuf*.

Le premier caractere *zéro*, mis à la

ſuite du ſecond, *un*, exprime *dix*, ou l'aſſemblage de *dix unités* ; ainſi 10 exprime *dix*. Par cette convention, la place des dixaines eſt marquée ; elle ſera toujours la ſeconde, en commençant par la droite. Ainſi, dans le caractere 10, *un* marque la place des dixaines ou la colonne des dixaines.

D'après ces caracteres & ce que nous venons d'obſerver, il eſt facile d'exprimer les nombres juſqu'à dix-neuf. Veut-on, par exemple, écrire *dix-huit*? L'on poſera l'unité, que l'on fera ſuivre du chiffre 8, comme par exemple, 18.

Puiſque la place des dixaines eſt marquée, elle pourra être occupée par les neuf caracteres, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ; ce qui ſera, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, que l'on énonce par *dix*, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *ſoixante*, *ſeptante*, *huitante*, *nonante*. D'après cela veut-on écrire en chiffres, *ſeptante-neuf*, ou *ſoixante-dix-neuf*, ce qui eſt la même choſe? On placera *ſept* à la gauche de *neuf* ; de cette maniere, 79.

Nous avons exprimé juſqu'à préſent *neuf dixaines* ou *nonante*, par le moyen de deux chiffres ; s'il falloit écrire *dix dixaines*, l'on placeroit l'*unité*, que l'on

feroit fuivre de deux *zéros*, comme dans cet exemple 100, & qui s'énonce *cent*. En effet 10 étant dix fois plus grand que 1, il s'enfuit que pour rendre 1 dix fois plus grand, il faut placer un 0 à fa droite. Maintenant pour rendre 10 dix fois plus grand, il fuffira de placer un 0 à la fuite de 10, de cette maniere 100, & que l'on énonce, comme nous l'avons dit, par ce feul mot *cent*.

La numération de deux chiffres étant bien entendue, celle de trois devient bien fimple. Soit la quantité 348, qu'il s'agit d'énoncer; il eft clair, d'après l'obfervation précédente, que cette quantité eft compofée de *trois centaines*, de *quatre dixaines*, ou *quarante*, & de *huit unités*. Pour l'énoncer à la fois, il faudra donc dire : . . . . 3 . . 4 . . 8.
trois cents quarante-huit.

Lorfque la place des dixaines ou des unités fera occupée par des *zéros*, l'on fous-entendra fa dénomination : ainfi dans cet exemple 304, l'on énoncera : 3 . 0 . 4.
trois cents quatre.

Lorfque l'on eft en état de nombrer une quantité compofée de trois chiffres, il eft facile de former la numération d'une autre plus compofée. Il ne faut pour cela

que ſe rappeller des noms que l'on donne aux chiffres dans telle ou telle place. Nous allons les donner dans l'exemple ſuivant : 1 3 , 4 5 6 , 7 8 9 , 3 9 4.
billion, million, mille, nombre.

Les chiffres, comme on le voit, ſont ſéparés de trois en trois ; la premiere tranche à droite, 394, eſt celle des *nombres* ; celle qui la précede s'appelle *mille*, &c. L'on diſtingue, comme on le voit, *unité, dixaine & centaine* de mille ; *unité, dixaine & centaine* de million, &c. Il ſera auſſi ſimple de nombrer trois chiffres quelconques pris dans cet exemple. Pour cela, il ſuffira de reconnoître leur dénomination, & d'énoncer ſuivant ce que nous avons dit.

En général, pour nombrer une quantité quelconque, l'on ſéparera les chiffres de trois en trois, en commençant par la droite. Cette préparation faite, l'on commencera la numération par la gauche, en nombrant les chiffres qui compoſent la premiere tranche à gauche, & donnant à la fin de la numération le nom qu'elle porte dans cette tranche : ainſi de ſuite,

DE L'ADDITION.

ADDITIONNER plusieurs quantités, c'est chercher un résultat égal à la somme des quantités proposées, & qui soit de la même espece.

Pour que le résultat soit de la même espece, il faut que les quantités que l'on propose d'ajouter, soient aussi de la même espece. Par exemple, il seroit absurde d'ajouter quatre toises avec quatre livres.

EXEMPLE.

SOIENT les quantités 4378, 4792, 320 & 404, que l'on propose d'ajouter.

L'on disposera ces quantités les unes sous les autres, en plaçant les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, &c., comme on le voit ici.

```
4378
4792
 320
 404
----
9894 somme.
```

Puisque chaque unité de la premiere colonne à gauche, n'est que la dixieme partie d'une unité de la colonne qui précede, il est nécessaire de commencer l'addition par les unités simples ; parce que

dans l'addition des unités ſimples, il peut ſe trouver *une*, *deux*, ou un plus grand nombre de *dixaines*, que l'on retiendra pour joindre à la colonne des *dixaines*.

Commençons donc par les unités ſimples : 8 & 2 font 10, & 4 font 14 unités, ou une dixaine & 4. L'on poſera 4 ſous la colonne des unités, & l'on retiendra une *dixaine*, que l'on joindra à la colonne des dixaines, en diſant : Une dixaine de retenue & 7 font 8, & 9 font 17, & 2 font dix-neuf dixaines, ou 190 qui contient une centaine & neuf dixaines. L'on poſera donc 9 ſous la colonne des dixaines, & l'on retiendra une centaine, que l'on joindra à la colonne des centaines, en diſant : Une centaine de retenue & 3 font 4, & 7 font 11, & 3 font 14, & 4 font dix-huit centaines, ou 1800 qui contient huit centaines & un mille ; l'on poſera 8 ſous la colonne des centaines, & l'on retiendra un mille, pour joindre à la colonne des milles, en diſant : Un mille & 4 font 5, & 4 font 9, que l'on poſera ſous la colonne des milles.

En général, lorſque la ſomme des unités qui compoſent une colonne quelconque, contiendra un certain nombre d'unités de la colonne qui précede, l'on

retiendra ce certain nombre d'unités, & l'on posera le surplus sous la colonne sur laquelle l'on opere ; & si l'addition donne un nombre exact d'unités de la colonne qui précede, l'on posera o sous la colonne sur laquelle l'on opere, & l'on retiendra le nombre exact d'unités, que l'on ajoutera à la colonne qui précede.

Nous recommandons aux commençants d'appliquer ce principe général à plusieurs exemples, avant de passer à la Soustraction.

DE LA SOUSTRACTION.

L'on entend par soustraction l'opération que l'on fait pour retrancher une quantité d'une plus grande de même espece : le résultat se nomme *reste.*

Exemple.

Proposons-nous de retrancher 4111 de 9231. L'on disposera toujours les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, &c., comme on le voit dans cet exemple. . . . 9231

4111

5120 reste.

L'on commencera par les unités, en disant : Qui de 1 en ôte 1, reste 0, que l'on placera sous les unités ; ensuite : Qui de 3 dixaines en ôte 1 dixaine, il reste 2, que l'on posera sous les dixaines. Enfin : Qui de 2 centaines en ôte 1 centaine, reste 1, & qui de 9 mille en ôte 4, reste 5 que l'on posera sous les milles.

Lorsque chacun des chiffres 4111 qui composent la quantité à soustraire, est plus petit que le correspondant dans la plus grande quantité, il est facile, comme on le voit, de résoudre la question ; mais il peut arriver que quelques-uns des chiffres de la quantité à soustraire, soient plus grands que les correspondans de la plus grande quantité, comme dans cet exemple 80001

72314

7687 reste.

où l'on voit que quoique la quantité à soustraire 72314, soit plus petite que la quantité de laquelle l'on veut soustraire ; cependant les chiffres 4, 1, 3 & 2, sont plus grands que leurs correspondants 1, 0, 0 & 0.

Pour faire cette soustraction, l'on commencera par les unités, en disant : Qui

de 1 ôte 4, ne peut; l'on empruntera une unité de la colonne précédente. Mais comme cette colonne eſt occupée par o, l'on ſera obligé d'avoir recours à la colonne des dixaines de mille; l'on empruntera donc une unité de cette colonne, qui vaudra dix mille; on laiſſera neuf mille ſur la colonne des milles, neuf centaines ſur la colonne des centaines, neuf dixaines ſur la colonne des dixaines; alors il ne reſtera de la dixaine de mille, qu'une dixaine, qui vaudra dix unités, & une que l'on a à la colonne des unités, font 11; qui de 11 ôte 4, reſte 7, que l'on poſera ſous la colonne des unités. L'on paſſera enſuite à la colonne des dixaines; & comme nous avons laiſſé neuf dixaines ſur cette colonne, l'on dira: Qui de 9 ôte 1, reſte 8. Delà l'on paſſera à la colonne des centaines, en diſant: Qui de 9 ôte 3, reſte 6: Qui de 9 ôte 2, reſte 7. Comme l'on a emprunté une dixaine de mille ſur huit dixaines de mille, cette colonne ne vaudra plus que ſept: Qui de 7 ôte 7, reſte o.

En général, lorſque l'on propoſera de retrancher une quantité d'une autre, il faudra diſpoſer la plus petite ſous la plus grande, en obſervant de placer les unités

ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, &c. Cela poſé, l'on obſervera ſi chaque chiffre de la quantité inférieure eſt plus petit que le correſpondant de la quantité ſupérieure ; dans ce cas, l'on retranchera chaque chiffre de la quantité à ſouſtraire de ſon correſpondant dans la quantité de laquelle l'on veut ſouſtraire, & l'on poſera les différents réſultats ſous les colonnes correſpondantes.

S'il ſe trouve des chiffres dans la quantité inférieure qui ſurpaſſent leurs correſpondants dans la quantité ſupérieure, l'on empruntera une unité de la colonne précédente dans la quantité ſupérieure ; & comme cette unité vaudra dix unités de la colonne ſur laquelle l'on opere, l'on joindra ces dix unités à celles qui compoſent cette colonne, & l'on continuera comme ci-deſſus.

Il faut obſerver qu'en empruntant une unité ſur la colonne précédente, cette colonne ſera diminuée d'une unité, & il faudra s'en rappeller lorſque l'on continuera l'opération.

Enfin, ſi les colonnes précédentes étoient occupées par des *zéros*, il faudroit paſſer ſucceſſivement, & emprunter une unité ſur la premiere colonne qui au-

roit quelques chiffres ſignificatifs ; alors l'on laiſſeroit 9 ſur chaque colonne occupée par *zéro*, & l'on acheveroit l'opération comme dans l'exemple précédent.

Il eſt aiſé d'appercevoir que pour faire une ſouſtraction, l'on eſt obligé de commencer par les unités de la plus petite eſpece, parce que dans le cas où l'un des chiffres de la quantité à ſouſtraire, ſeroit plus grand que le correſpondant dans la quantité de laquelle l'on veut ſouſtraire ; il faut alors emprunter ſur les colonnes précédentes.

REMARQUE.

PUISQUE une unité d'une colonne quelconque n'eſt que la dixieme partie d'une unité de la colonne ſuivante, il eſt aiſé de rendre une quantité dix fois plus grande qu'elle ne l'eſt ; il ſuffit pour cela d'ajouter un *zéro* à la ſuite de cette quantité. Veut-on rendre 13 dix fois plus grand ? L'on écrira 130 ; car dans la premiere quantité 13, 3 occupe la colonne des unités, & dans 130 il occupe celle des dixaines ; donc 130 fera dix fois plus grand que 13. En faiſant les mêmes obſervations, l'on verra, avec la même facilité, que pour rendre un nombre dix fois, cent fois, mille fois, &c.

plus grand, il suffira d'ajouter à la suite de ce nombre *un*, *deux*, *trois*, &c. *zéros*.

Fondés sur ces principes, passons maintenant à la Multiplication.

DE LA MULTIPLICATION.

MULTIPLIER un nombre par un autre, c'est répéter un des nombres proposés autant de fois qu'il y a d'unités dans le second; ainsi multiplier 4 par 3, c'est répéter 4 trois fois, ou ajouter 4 trois fois à lui-même; ce qui donne : . . 4

4

4

12

Le chiffre 4 qui est multiplié, se nomme *multiplicande*; & la quantité 3 par laquelle l'on multiplie, s'appelle *multiplicateur*; & le résultat 12 se nomme *produit*.

Puisque multiplier un nombre par un autre, c'est ajouter le multiplicande autant de fois à lui-même qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; nous en conclurons que la multiplication est une addition abrégée, dans laquelle le produit est toujours de même espece que le mul-

tiplicande ; car nous avons prouvé que dans une addition la ſomme eſt toujours de même eſpece que les quantités que l'on veut ajouter.

Comme il eſt néceſſaire d'apprendre par cœur la multiplication des neuf premiers chiffres les uns par les autres, nous allons donner une table pour faciliter cette étude.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

L'uſage de cette table eſt fort ſimple ; il ſuffit, pour trouver le produit de deux chiffres, de chercher le caractere qui ſe trouve en même-temps vis-à-vis le multiplicande, & ſous la caſe du multipli-

cateur. Par exemple, si l'on cherchoit le produit de 8 par 7; comme 56 est dans une case disposée sous le 8, & vis-à-vis le 7, l'on en conclut que 56 est le produit de 7 par 8; ainsi des autres. Passons maintenant à un exemple de multiplication.

EXEMPLE.

L'ON propose de multiplier 347 par 242. L'on disposera les deux quantités comme dans l'addition, en faisant attention seulement de placer la plus petite quantité sous la plus grande, comme on le voit ici . . . . . 347 multiplicande.
242 multiplicateur.

694
13880
69400

83974 produit.

Il faudra répéter le multiplicande deux fois, ensuite quatre dixaines de fois, & enfin deux centaines de fois, en disant: 2 fois 7 font 14, pose 4 sous les unités, & retiens une dixaine; 2 fois 4 font 8 dixaines, & une de retenue font 9; pose 9 sous les dixaines, & ne retiens aucune centaine: enfin 2 fois 3 font 6

centaines, que l'on posera sous la colonne des centaines.

694 est donc le produit de 347 par deux unités, ou exprime deux fois 347.

Pour multiplier maintenant 347 par quatre dixaines, il faudra s'imaginer pour un instant que ces quatre dixaines sont quatre unités, & multiplier comme précédemment, en disant : 4 fois 7 font 28 ; pose 8, & retiens 2 : 4 fois 4 font 16, & 2 de retenues font 18 ; pose 8, & retiens 1 : enfin 4 fois 3 font 12, & 1 de retenue font 13 ; pose 3, & avance 1. Le produit de 347 par quatre unités sera donc 1388 ; donc le produit de 347 par quatre dixaines sera dix fois plus grand que 1388, ou égal à 13880.

L'on trouvera de même que le produit de 347 par deux unités, est 694 ; donc celui de 347 par 200 sera cent fois plus grand que 694, ou égal à 69400. Voyez d'ailleurs ce que nous avons dit dans la remarque précédente.

En additionnant ces trois différents résultats, la somme 83964 sera le produit de 347 par 242.

En général, après avoir disposé les deux quantités l'une sous l'autre, l'on répétera le multiplicande autant de fois qu'il

qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, en posant sous chaque colonne le chiffre qui surpasseroit dans le produit trouvé une ou plusieurs unités des colonnes precédentes.

La multiplication par les unités du multiplicateur étant faite, il faudra répéter le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans la colonne des dixaines, en posant le premier chiffre qui résultera de la multiplication, sous la colonne des dixaines, & en plaçant o à la colonne des unités; enfin l'on finira comme pour les unités.

A l'égard des centaines, il faudra placer le premier chiffre du produit sous les centaines, & occuper par des *zéros* la colonne des dixaines & des unités de ce nouveau résultat; l'on fera les mêmes observations à l'égard des *milles*, *dixaines de mille*, &c.

S'il se trouvoit quelques *zéros* dans le multiplicateur, l'on poseroit les *zéros* du multiplicateur dans la place qu'ils doivent occuper au produit, & l'on continueroit la multiplication sur le premier chiffre figuratif qui précéderoit les *zéros* du multiplicateur.

Les produits particuliers étant déterminés, on les additionnera, en suivant les mêmes procédés que dans l'Addition.

DE LA DIVISION.

La Divifion eft une opération par laquelle l'on détermine le nombre de fois qu'une quantité eft contenue dans une autre. Par exemple, en cherchant combien de fois 8 contient 4 ; l'opération que l'on fait pour trouver le réfultat 2, fe nomme *divifion*, & ce réfultat s'appelle *quotient.*

La quantité que l'on veut divifer s'appelle *dividende*; & celle par laquelle l'on divife, fe nomme *divifeur.*

Pour faire une divifion, l'on place le dividende & le divifeur fur une même ligne, en tirant au-deffous d'eux une ligne horizontale, & féparant les deux termes par une ligne verticale. Veut-on, par exemple, divifer 344 par 52 ? On écrit les termes de cette maniere . . 344 | 52
| A

Le réfultat, ou le quotient, fe place dans le crochet marqué A.

Lorfque l'on veut divifer un chiffre par un autre, pourvu que l'on poffede bien la table que nous avons donnée, l'opération eft très-facile. Pour divifer, par exemple, 8 par 4 ; l'on dira : En 8,

combien de fois 4 ? Il y eſt deux fois; c'eſt-à-dire que, dans cette hypotheſe, il faudroit ajouter 4 à lui-même, pour compoſer 8 ; donc pour reconnoître ſi 4 eſt contenu exactement deux fois dans 8, il faudra multiplier le réſultat ou quotient 2 par le diviſeur 4.

De même veut-on diviſer 9 par 4, l'on dira : En 9 combien de fois 4 ? Il y eſt 2 fois ; c'eſt-à-dire que 4 ajouté à lui-même, doit donner 9 ; mais 2 fois 4 font 8, qui differe de 9 de 1, d'où nous conclurons que 9 contient 4 deux fois, avec 1 de reſte ; donc il faut multiplier le quotient par le diviſeur, & retrancher le produit du dividende, pour connoître ſi le diviſeur eſt exactement contenu dans le dividende ; & dans le cas que cela ne ſoit pas, quel eſt le reſte ?

Lorſque le dividende & le diviſeur ſont compoſés de pluſieurs chiffres, il eſt difficile de reconnoître combien de fois l'un contient l'autre, & quel eſt le reſte ? Par exemple, ſi l'on veut déterminer combien de fois 534 contient 292 ; l'on ne découvre pas ſur le champ quel doit être le quotient ; l'opération ſe fait alors par une eſpece de tâtonnement, & l'on dit : En 5 combien de fois 2 ? Il

y eſt deux fois ; c'eſt-à-dire qu'il paroît que 292 eſt contenu deux fois dans 534; & pour le reconnoître, il faudra multiplier 292 par le quotient 2, l'on trouvera pour le produit 584; mais 584 eſt plus grand que le dividende 534, donc 292 ne peut pas être contenu deux fois dans 534; le quotient eſt donc trop conſidérable; & nous dirons que quoique 5 premier chiffre du dividende, contienne 2 premier chiffre du diviſeur deux fois, cependant 534 ne contient 292 qu'une fois; l'on poſera 1 au lieu de 2 au quotient. Multipliant 292 par ce nouveau quotient 1, & retranchant le produit 292, du dividende 534, le reſte ſera 242; c'eſt-à-dire que 534 contient 292 une fois, avec un reſte 242.

De même, ſi l'on avoit à diviſer 5439 par 623, il ſeroit difficile d'appercevoir ſur le champ combien de fois l'un de ces nombres contient l'autre. Il ſe préſente ici une difficulté, c'eſt que le premier chiffre 5 du dividende eſt plus petit que le premier chiffre 6 du diviſeur; alors il faudra prendre les deux premiers chiffres 54 du dividende, que l'on diviſera par le premier chiffre 6 du diviſeur, en diſant: En 54, combien de fois 6? Il y eſt neuf fois. Mais en faiſant l'ob-

ſervation ci-deſſus, l'on appercevra que neuf fois 623 donneroient un produit plus grand que le dividende 5439; d'où l'on conclut que le quotient 9 eſt trop conſidérable. Ne mettons que 7; c'eſt-à-dire ſuppoſons pour un inſtant que 5439 contienne 623 ſept fois, alors ſept fois 623 donneront 4361, qui retranchés de 5439, donnent un reſte égal à 1078. Mais ce reſte eſt plus grand que 623; il contiendroit donc encore 623; donc le quotient 7 eſt trop petit: c'eſt-à-dire que 5439 contient 623 plus de ſept fois. Suppoſons qu'il le contienne huit fois; alors huit fois 623 donneront 4984, qui étant retranchés de 5439, donnent pour reſte 455, nombre plus petit que le diviſeur.

En général, 1.° Il peut arriver qu'en faiſant une diviſion, le quotient que l'on trouve multiplié par le diviſeur donne un produit égal au dividende; alors le diviſeur eſt contenu un nombre exact de fois dans le dividende.

2.° Il peut arriver que le quotient multiplié par le diviſeur donne un produit plus grand que le dividende; alors le quotient trouvé eſt trop conſidérable.

3.° Il peut arriver que le quotient multiplié par le diviſeur, & le produit étant

retranché du dividende, le reſte ſoit encore plus grand que le diviſeur; dans ce cas le quotient ſeroit trop petit, c'eſt-à-dire que le diviſeur ſeroit contenu un plus grand nombre de fois dans le dividende.

REMARQUE.

LORSQUE l'on a à diviſer une quantité par une autre, de maniere que le dividende ait un chiffre de plus que le diviſeur, & que les premiers chiffres du dividende ſoient plus petits que ceux du diviſeur; l'on ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient, c'eſt-à-dire que le quotient ne pourra jamais être 10. Propoſons-nous de diviſer 543 par 59. Suivant le principe précédent, il faudroit diviſer 54 par 5, & dire: En 54 combien de fois 5? Il y eſt dix fois. Mais dix fois 59 feroient 590, plus grand que 543; & en général il en arrivera de même à tous les nombres de cette eſpece, car la quantité 543 eſt compoſée d'un chiffre de plus que 59: mais ſi l'on ajoute un chiffre à la ſuite de 59; alors les deux quantités ſeront compoſées d'un même nombre de chiffres; & la plus grande ſera celle dont les deux premiers chiffres ſeront plus grands. Mais en multipliant

une quantité quelconque par 10, il ſuffit d'ajouter un *zéro* à la ſuite de cette quantité; donc alors le produit aura un égal nombre de chiffres que le dividende. Mais, dans notre ſuppoſition, les deux premiers du dividende ſont plus petits que les deux premiers du diviſeur; donc le nouveau produit ſera toujours plus grand que le dividende; donc l'on ne pourra jamais mettre 10 au quotient. Fondé ſur ces principes, il ſera facile d'exécuter des diviſions plus conſidérables; c'eſt ce qu'on va voir dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE.

L'ON propoſe de diviſer 377090 par 47. L'on diſpoſera le dividende & le diviſeur, comme on le voit.

```
 . . .
377090 | 47
------ |-----
376    | 8023
---
 109
  94
 ---
  150
  141
  ---
    9
```

Comme les deux premiers chiffres 37 du

dividende sont plus petits que les deux premiers du diviseur, l'on prendra un chiffre de plus dans le dividende; c'est-à-dire qu'au lieu de diviser 37 par 47, l'on divisera 337 par 47, en disant: En 37 combien de fois 4? Il y est huit fois. Le produit est 376, & le reste 1; l'on abaissera le o suivant à côté du reste 1; l'on marquera un point au-dessus de ce o, pour se rappeller qu'il est descendu: alors il faudra diviser la nouvelle quantité 10 par le diviseur 47. Mais 10 ne peut pas contenir 47; l'on mettra donc o au quotient à la suite de 8 pour occuper cette place; & l'on descendra le 9 suivant du dividende à côté de 10. Alors la quantité sera 109, qu'il faudra diviser par 47. En 10 combien de fois 4? Il y est deux fois. Multipliant 2, quotient trouvé par le diviseur 47, & retranchant le produit 94 du dividende 109, le reste sera 15; l'on abaissera le dernier o du premier dividende, & la nouvelle quantité sera 150, qui, divisée par 47, donnera 4 au quotient, & 9 de reste.

En général, pour diviser une quantité par une autre, il faudra, 1.° Disposer le dividende & le diviseur sur la même ligne; 2.° Observer de combien de chiffres l'un

& l'autre facteurs sont composés: 3.° Prendre dans le dividende & à commencer par la gauche un pareil nombre de chiffres que dans le diviseur; & observer ensuite si les premiers chiffres du dividende sont plus grands ou plus petits que ceux du diviseur. S'ils sont plus petits, l'on prendra un chiffre de plus dans le dividende; alors commençant la division, l'on observera si le reste provenant de l'opération, est égal, plus grand, ou plus petit que le diviseur. S'il est égal, il faudra augmenter de 1 le quotient; s'il est plus grand, l'on augmentera davantage le quotient; enfin s'il est plus petit, le quotient que l'on aura trouvé sera le vrai résultat. Si après avoir déterminé le reste de l'opération, que ce reste soit o ou tout autre chiffre, & après avoir descendu à côté du reste le chiffre suivant du dividende, la nouvelle quantité est encore plus petite que le diviseur, l'on placera o à côté du quotient, & l'on abaissera le chiffre suivant, pris dans le premier dividende; l'on placera toujours à mesure des *zéros* jusqu'à ce que la nouvelle quantité soit plus grande que le diviseur: alors l'on continuera l'opération suivant ce qui vient d'être dit.

Jusqu'ici nous n'avons opéré que sur des quantités entieres : mais pour la commodité du commerce l'on a subdivisé les parties entieres. Par exemple, la *livre*, monnoie courante, est composée de vingt autres parties que l'on appelle *sous* ; de même la *toise*, mesure reçue d'une certaine longueur, est composée de six autres mesures que l'on appelle *pieds ;* celle-ci de douze, que l'on nomme *pouces*, &c.

Les subdivisions des especes une fois reçues, il faut savoir les ajouter, les soustraire, les multiplier, les diviser. C'est ce que nous ferons voir, après avoir traité des fractions, quantité plus petite que l'espece d'unité que l'on considere.

DES FRACTIONS.

En général une fraction est une ou plusieurs parties d'un tout : ainsi le quart, le cinquieme ou les trois-septiemes d'une livre ou de toute autre espece de mesure, est ce qu'on appelle *une fraction.*

Pour se former une idée nette d'une fraction, l'on concevra le tout divisé en un certain nombre de parties égales ; & le caractere que portera la fraction, expri-

mera le nombre des parties égales que l'on prend du tout. Par exemple, pour ſe former l'idée des trois-quarts d'une livre compoſée de vingt ſous, l'on concevra vingt ſous diviſés en quatre parties égales; chaque partie, c'eſt-à-dire chaque quart, donnera cinq ſous, & le chiffre 3 que la fraction porte, indiquera qu'il faut prendre trois de ces quarts : or le quart de la livre eſt cinq ſous; les trois quarts donneront 15 ſous.

Puiſque l'on conçoit le tout, ou l'entier, diviſé en un certain nombre de parties égales, dont l'on prend une certaine quantité, il faut néceſſairement deux termes pour repréſenter une fraction; celui qui indique en combien de parties égales l'entier eſt partagé, s'appelle *dénominateur*; & celui qui exprime par le nombre de ſes unités combien l'on prend de ſes parties égales, s'appelle *numérateur.* Ainſi dans la fraction *trois-quarts*, & qui s'écrit ainſi $\frac{3}{4}$, 4 eſt le *dénominateur*, & 3 le *numérateur.*

Puiſque le dénominateur d'une fraction indique en combien de parties égales l'entier eſt partagé, il exprimera l'eſpece de la fraction; donc plus le dénominateur ſera grand, plus la fraction ſera pe-

tite ; parce que plus l'on confidere de parties dans un tout, plus fes parties font petites. Delà veut-on rendre $\frac{3}{4}$ cinq fois plus petit ? Il fuffira de rendre le dénominateur cinq fois plus grand ; parce qu'alors il contiendra cinq fois plus de parties ; ainfi $\frac{3}{20}$ fera cinq fois plus petit que $\frac{3}{4}$, ou exprimera le cinquieme de $\frac{3}{4}$, ou enfin le quotient de $\frac{3}{4}$ divifé par 5 ; donc pour divifer une fraction par un entier, il fuffira de multiplier le dénominateur par l'entier propofé, & de laiffer le numérateur tel qu'il eft.

Il eft clair auffi qu'en fuppofant l'entier divifé en un certain nombre de parties égales, plus l'on prendra de fes parties, plus la fraction fera grande ; donc fi l'on veut multiplier $\frac{3}{4}$ par 9, il fuffira de multiplier 9 par le numérateur 3, ce qui donnera $\frac{27}{4}$.

En multipliant le numérateur d'une fraction par une quantité, l'on rend la fraction d'autant de fois plus grande qu'il y a d'unités dans le nombre propofé ; & on la rendra d'autant de fois plus petite, en multipliant le dénominateur par ce même nombre ; donc fi l'on multiplie les deux termes d'une fraction par la même quantité, elle ne changera point de valeur. En

faiſant quelques réflexions là-deſſus, l'on verra aiſément que la fraction ne changera point de valeur, en diviſant les deux termes qui la compoſent, par la même quantité.

Le dénominateur d'une fraction indiquant l'eſpece dont elle eſt, il eſt clair que l'on ne pourra pas ajouter pluſieurs fractions dont les dénominateurs ſeroient différents, puiſqu'alors les fractions ſeroient de différente eſpece. Il nous faut donc une méthode pour réduire pluſieurs fractions à la même dénomination ; elle conſiſte à multiplier le numérateur & le dénominateur de chaque fraction, par le produit des dénominateurs des autres fractions. Un exémple rendra ceci ſenſible.

Propoſons-nous de réduire à la même dénomination les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$: pour le faire, l'on multipliera les deux termes 2 & 3 de la premiere fraction, par le produit 20 des dénominateurs des deux autres fractions ; la fraction résultante ſera $\frac{40}{60}$. L'on multipliera de même les deux termes 3 & 4 de la ſeconde par le produit 15 des dénominateurs des deux autres fractions ; la fraction réſultante ſera $\frac{45}{60}$. Enfin, par une ſemblable

opération sur la derniere fraction $\frac{4}{5}$, on la réduira à celle-ci $\frac{48}{60}$. Les trois nouvelles fractions $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, sont égales aux fractions proposées, puisque les deux termes de chacune d'elles ont été multipliés par la même quantité.

Cette préparation faite sur les fractions, il est facile de les ajouter; il suffit pour cela de faire la somme des numérateurs, & de lui donner pour dénominateur le dénominateur commun; ainsi la somme des fractions $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, ou de leurs égales $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, sera $\frac{133}{60}$. L'on voit bien aussi que le dénominateur étant l'espece de la fraction, la somme doit être de la même espece; ainsi il seroit absurde d'ajouter les dénominateurs. Dans les fractions ci-dessus, le dénominateur 60 indique que ces fractions sont toutes des soixantiemes parties de l'unité. Leur somme qui doit être de même espece sera aussi des soixantiemes; donc, quel que soit le nombre des fractions, il ne faudra jamais ajouter leurs dénominateurs.

A l'égard de la soustraction, il faudra toujours réduire les fractions à la même dénomination; alors l'on retranchera le plus petit numérateur du plus grand, & l'on donnera au reste pour dénomina-

teur le dénominateur commun. Il eſt inutile d'inſiſter là-deſſus, & de donner des exemples ſur des opérations auſſi faciles.

Juſqu'ici nous avons donné la multiplication d'une fraction par un entier, la diviſion d'une fraction par un entier, l'addition & la ſouſtraction des fractions; il nous reſte maintenant à donner la multiplication & la diviſion des fractions par les fractions.

Multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{5}$, c'eſt rendre la fraction $\frac{3}{4}$ quatre cinquiemes de fois plus grande, ou prendre les quatre-cinquiemes de $\frac{3}{4}$; tout de même qu'en multipliant 3 par 7, l'on prend 3 ſept fois. Mais, pour prendre les $\frac{4}{5}$ d'une quantité, il faut diviſer cette quantité par 5, pour en avoir le cinquieme, & multiplier le quotient par 4 pour prendre quatre fois ce cinquieme. Diviſons donc $\frac{3}{4}$ par 5; le cinquieme ſera $\frac{3}{20}$; & quatre fois ce cinquieme ſera $\frac{12}{20}$. L'on peut obſerver que l'on eſt parvenu au réſultat $\frac{12}{20}$, en multipliant le numérateur de la premiere par le numérateur de la ſeconde, & le dénominateur de la premiere par le dénominateur de la ſeconde; donc il faudra ſuivre ce procédé pour multiplier une fraction par une fraction.

L'unité peut toujours ſervir de dénominateur à l'entier ; ainſi $\frac{4}{1}$ ou 4 eſt la même choſe ; ce qui n'a beſoin d'aucune démonſtration. Cela poſé, diviſer une quantité par 4 ou par $\frac{4}{1}$, c'eſt prendre le quart de cette quantité ou la multiplier par $\frac{1}{4}$, fraction renverſée de $\frac{4}{1}$; de même diviſer une quantité par $\frac{4}{2}$, ce ſera prendre les deux quarts ou la moitié de la quantité même, ou bien multiplier par $\frac{2}{4}$; donc diviſer une quantité par une fraction, c'eſt la multiplier par l'inverſe de la fraction diviſeur. Ainſi, pour diviſer $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, il faudra multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{3}{2}$; & le produit $\frac{9}{8}$ ſera le quotient de $\frac{3}{4}$ diviſé par $\frac{2}{3}$: il en eſt de même des autres.

Il arrive quelquefois que l'on peut ſimplifier les termes d'une fraction, c'eſt-à-dire réduire une fraction en une autre dont les termes ſoient moins compoſés; par exemple, la fraction $\frac{36}{56}$ peut ſe ſimplifier; mais pour cela, il faut ſe rappeller que l'on ne change point de valeur à une fraction, en diviſant les deux termes qui la compoſent, par la même quantité. Ainſi les termes de la fraction $\frac{36}{56}$ finiſſant par des nombres pairs, l'on pourra prendre la moitié du numérateur & du dénominateur; ce qui donnera la

la nouvelle fraction $\frac{18}{28}$ égale à $\frac{36}{56}$. Les termes de la nouvelle fraction pouvant encore se diviser par 2, on effectuera la division, & l'on aura $\frac{9}{14}$, qui est irréductible ; car l'on ne peut pas diviser exactement le numérateur & le dénominateur par la même quantité. En effet si l'on prend le tiers du numérateur, l'on ne pourra pas faire la même opération sur le dénominateur.

Fn général, l'on observera si les deux termes de la fraction sont divisibles par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ; & l'on tentera sur l'un & l'autre terme toutes les divisions de ces nombres.

Il arrive souvent, sur-tout dans l'addition des fractions, que le résultat est une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur ; dans ce cas, l'on divisera le premier de ces termes par le second. Si la division se fait sans reste, le quotient indiquera que la fraction proposée contenoit un nombre exact d'entiers. Si la division ne se fait pas sans reste, alors le reste servira de numérateur à une nouvelle fraction dont le dénominateur sera le diviseur ; par exemple, dans la fraction $\frac{9}{8}$, l'on trouvera un entier & $\frac{1}{8}$ de reste. En effet $\frac{9}{8}$ est composé de $\frac{8}{8}$ plus $\frac{1}{8}$.

Or $\frac{8}{8}$ eſt égal à 1 ; car l'entier eſt diviſé en huit parties égales, & l'on prend toutes les parties ; donc $\frac{8}{8}$ égal 1, c'eſt-à-dire qu'il faudra diviſer le numérateur par le dénominateur, pour découvrir les entiers. Quelquefois il eſt néceſſaire de réduire les entiers en fractions qui aient pour dénominateur un nombre propoſé. Par exemple, ſi l'on propoſoit d'ajouter 4 à $\frac{3}{7}$, il faudroit premiérement réduire l'entier 4 en ſeptiemes ; ce que l'on fera en multipliant 4 par 7, & donnant 7 pour dénominateur au produit 28. Alors comme $\frac{28}{7}$ eſt égal à 4 ; $\frac{28}{7}$ plus $\frac{3}{7}$, ou 4 plus $\frac{3}{7}$, donnera $\frac{31}{7}$, ou en réduiſant, 4 plus $\frac{3}{7}$.

Pour réduire donc un entier en fractions qui aient pour dénominateur un nombre propoſé, il faudra multiplier l'entier par le nombre propoſé, & lui donner ce même nombre pour dénominateur.

Juſqu'ici nous n'avons opéré que ſur des quantités entieres & ſur les fractions ; mais il eſt encore des ſous-eſpeces dans les quantités, auxquelles il faut appliquer les regles précédentes. Ces ſous-eſpeces ſont celles dans leſquelles l'on eſt convenu de diviſer les meſures en général. Nous allons donner les ſubdiviſions des

especes principales dont on se sert ordinairement; *la livre*, comme nous l'avons déjà dit, se divise en vingt parties, que l'on appelle *sous*; le sou en 12 *deniers*, & l'on est convenu de certains signes pour exprimer les quantités premieres & les sous-especes; ces signes sont ₶ pour désigner les livres, ſ pour les sous, & ₰ pour les deniers.

La *livre* poids de marc, contient 2 *marcs*; le marc, 8 *onces*; l'once, 8 *gros*; le gros, 3 *deniers*; & le denier, 24 *grains*. Les signes, suivant l'ordre que nous les avons énoncés, sont £, M, O, G, D, g.

La *toise* contient, comme nous l'avons dit, 6 *pieds*; le pied, 12 *pouces*; le pouce, 12 *lignes*; la ligne, 12 *primes*, &c. Les signes, suivant l'ordre que nous venons de les énoncer, sont T, P, p, l, ′.

L'*aune* se divise ordinairement en *demis*, *tiers*, *quarts*, *huitiemes* & *seiziemes*. Au reste chaque pays a ses usages & ses signes particuliers pour les mesures, les poids & les monnoies.

L'on est convenu d'appeller *quantités complexes* celles qui sont composées de leurs sous-especes; & *quantités incomplexes*, celles qui ne contiennent que l'espece principale. Ainsi 3 l. 4 f. 4 d. est

une quantité complexe ; & 6 l. eſt une quantité incomplexe.

APPLICATION des Regles précédentes aux quantités complexes.

DE L'ADDITION.

L'on propoſe d'ajouter les quantités . . . . .

34#	17ſ	8d
117 .	19 .	3
4 .	17 .	8
157 .	14 .	7

L'on diſpoſera les nombres de maniere que les deniers ſoient dans la même colonne, & de même des ſous, comme on le voit dans cet exemple. Cela poſé, l'on commencera par les quantités de la plus petite eſpece. Dans cet exemple, ce ſont les deniers ; & l'on dira : 8 & 3 font 11, & 8 font 19 d., qui compoſent 1 ſ. & 7 d. ; l'on poſera les 7 d. dans leur colonne, & l'on retiendra 1 ſ. pour joindre à la colonne des ſous, en diſant : 1 & 7 font 8, & 9 font 17, & 7 font 24 ; l'on poſera 4 ſ. ſous les unités des ſous, & l'on portera les deux dixaines de ſous à leur colonne, en diſant : 2 & 1 font 3, & 1 font 4, & 1 font 5 dixaines de ſous, ou 50 ſ. ; mais la livre contient 20 ſous, il faut donc

divifer 50 par 20, pour avoir le nombre de livres contenues dans 50 f. : or, 50 divifés par 20, donnent $\frac{50}{20}$, ou $\frac{5}{2}$, qui indiquent que pour réduire en livres le nombre de dixaines de fous, il faudra en prendre la moitié ; or la moitié de 5 dixaines eft 2 & 1 dixaine de refte ; l'on placera donc 1 à la colonne des dixaines des fous, & l'on retiendra 2 l. que l'on joindra à la colonne des livres ; & l'on achevera le refte comme il a été dit.

En général, pour additionner des quantités complexes, l'on commencera par les plus petites fous-efpeces ; & l'on obfervera dans leurs fommes combien il y a d'unités de l'efpece qui précede immédiatement. Cette vérification faite, l'on pofera fous la colonne fur laquelle l'on opere ce qui ne pourra pas compofer une unité de l'efpece qui précede ; & l'on portera fur la colonne précédente le nombre d'unités que l'on a retenues dans celles que l'on vient d'ajouter.

SOUSTRACTION.

L'ON propofe de retrancher de . . . . 344 ₶ 1 ſ 3 ₰
49 . 19 . 8
294 . 1 . 7

Après avoir diſpoſé les quantités ſuivant ce que nous avons dit, l'on commencera l'opération par la quantité de la plus petite eſpece, en diſant : Qui de 3 d. ôte 8 d., ne peut ; l'on empruntera 1 ſ. ſur la colonne des ſous, ce ſou vaut 12 deniers ; 12 & 3 font 15 ; qui de 15 en ôte 8, reſte 7, que l'on poſera ſous la colonne des deniers.

Puiſque l'on a pris 1 ſou ſur la colonne des ſous, & qu'elle n'étoit compoſée que de 1, il ne doit y reſter que 0 ; qui de 0 en ôte 19, ne peut ; l'on empruntera 1 l. ſur la colonne des unités de livres qui vaut 20 ſous ; 20, & 0 qui ſe trouve à la colonne des ſous, font toujours 20 ; qui de 20 en ôte 19, reſte 1, que l'on placera ſous la colonne des ſous. A l'égard de la ſouſtraction ſur les quantités entieres, l'on ſuivra les procédés que nous avons indiqués là-deſſus.

En général, pour retrancher une quantité complexe quelconque d'une autre de même eſpece, après avoir diſpoſé la plus petite de ces quantités ſous la plus grande, l'on commencera l'opération par la colonne de la plus petite eſpece. Cette colonne peut être égale, plus grande, ou plus petite que la colonne

correſpondante de la plus petite quantité; ſi elle eſt plus grande, l'on fera la souſtraction à l'ordinaire ; ſi elle eſt égale, l'on placera o à la colonne réſultante; enfin ſi elle eſt plus petite, l'on prendra une unité ſur la colonne précédente ; cette unité compoſera toujours un certain nombre d'unités de la colonne ſur laquelle l'on opere ; l'on ajoutera ce *certain nombre d'unités* à celles qui compoſent la colonne ſur laquelle l'on opere, & l'on fera la ſouſtraction à l'ordinaire. L'on paſſera enſuite à la colonne précédente ; l'on ſe rappellera que l'on a emprunté une unité de cette colonne, & l'on continuera ainſi, en faiſant les mêmes obſervations.

De la Multiplication.

Dans la multiplication des nombres complexes, il peut arriver que le multiplicande ſoit complexe, & que le multiplicateur ne le ſoit pas, ou le contraire; enfin il peut arriver que les deux termes ſoient des quantités complexes. Quelle que ſoit l'eſpece des termes, la multiplication s'exécutera toujours en répétant le multiplicande par chaque partie du multiplicateur. Ainſi pour multiplier 34 l.

14 ſ. 9 d. par 94 l., il faudra multiplier 34 par 94 l.; 14 ſ. par 94 l.; & 9 d. par 94 l. Enfin ſi l'on avoit à multiplier 34 l. 3 ſ. 9 d. par 19 t. 5 P. 7 p., il faudra répéter 34 l. 3 ſ. 9 d. par 19 t.; enſuite 34 l. 3 ſ. 9 d. par 5 P.; enfin 34 l. 3 ſ. 9 d. par 7 p.

Comme ce dernier exemple eſt plus compoſé, nous nous y arrêterons. Mais auparavant il faut être prévenu des principes ſuivants.

En multipliant une quantité quelconque par l'unité, le produit ſera la quantité qui a été multipliée; ainſi 9 multiplié par 1, donne au produit 9; en multipliant 9 par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c., les produits, ſuivant ce que nous avons dit, ſeront $\frac{9}{2}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{9}{5}$, &c.; c'eſt-à-dire que pour réduire ces fractions, il faudra prendre la moitié, ou le quart, ou le cinquieme de 9. D'après cela, 1 l. monnoie courante (& ainſi des autres eſpeces) multipliée par une quantité complexe ou non, donnera toujours cette quantité; donc la moitié ou 10 ſ., le quart ou 5 ſ., le cinquieme ou 4 ſ., le dixieme ou 2 ſ., le vingtieme ou 1 ſ., donneront la moitié, le quart, le cinquieme, le dixieme, ou le vingtieme du produit provenu de la multiplication par 1 l. Ainſi veut-on mul-

tiplier 34 l. par 15 ſ., l'on obſervera que 15 ſous ſont compoſés de 10 ſ. moitié de 1 l., & 5 ſ. qui en eſt le quart.

Cela poſé, puiſqu'en multipliant 1 livre, ou 1 par 34, le produit eſt 34; néceſſairement ſi l'on multiplie 34 par la moitié de 1 livre qui eſt 10 ſous, le produit ſera la moitié de 34 ou 17.

Puiſque 5 ſous ſont le quart de 1 l., & que cette livre multipliée par 34 donne toujours au produit 34; en multipliant par 5 ſous, qui n'eſt que le quart de la livre, l'on ne doit avoir au produit que le quart de 34, qui eſt 8 & $\frac{1}{2}$; ajoutant ces deux produits enſemble, la ſomme ſera le produit de 34 par 15 ſ.

Lorſque l'on diviſe une quantité par une autre, & que la diviſion ſe fait exactement; alors le diviſeur eſt appellé *partie aliquote* du dividende, & le quotient indique quelle eſt cette partie : ainſi 20 diviſés par 10, donnant exactement 2 au quotient, l'on dit alors que 10 eſt *partie aliquote* de 20, & le quotient 2 indique que 10 eſt la moitié de 20; de même 12 diviſés par 3, donnant exactement 4 au quotient, 3 ſera partie aliquote de 12, & le quotient 4 indiquera que 3 eſt le quart de 12; ainſi des autres.

Cela bien entendu, passons à un exemple de multiplication complexe. Proposons-nous de multiplier 34 l. 13 s. 11 d. par 19 l. 18 s. 7 d.

	l.	s.	d.	
	34	13	11	
	19	18	7	
	306	0	0	
	340	0	0	
Produit de 19 l. par 10 s.	9	10	0	
Produit de 19 l. par 2 s.	1	18 *	0	
Produit de 19 l. par 1 s.	0	19 *	0	
Produit de 19 l. par 6 d.	0	9 *	6	
Produit de 19 l. par 3 d.	0	4	9 *	
Produit de 19 l. par 2 d.	0	3	2	
Produit de 34 l. 13 s. 11 d. par 10 s.	17	6 *	11 *	$\frac{1}{2}$ ou $\frac{15}{30}$
Produit de 34 l. 13 s. 11 d. par 4 s.	6	18 *	9 *	$\frac{2}{5}$ ou $\frac{12}{30}$
Produit de 34 l. 13 s. 11 d. par 4 s.	6	18 *	9 *	$\frac{2}{5}$ ou $\frac{12}{30}$
Produit de 34 s. 13 s. 11 d. par 6 d.	0	17	4	$\frac{1}{5}$ ou $\frac{6}{30}$
Et enfin, produit de 34 l. 13 s. 11 d. par 1 d.	0	2	10 *	. . . $\frac{21}{30}$
TOTAL . . .	691	9	2	$\frac{1}{5}$ ou $\frac{6}{30}$

DÉTAIL des opérations.

L'on commencera par multiplier 34 l. par 19 l. ; l'on multipliera ensuite 13 s. par 19 l., & enfin 11 d. par 19 l. ; la somme de ces différents produits donnera celui de 34 l. 13 s. 11 d. par 19 l.

Pour multiplier 13 s. par 19 l., j'observe que 13 s. sont composés de trois parties aliquotes de la livre, ces trois parties sont 10 s., 2 s., & 1 s. ; puisqu'en multipliant 1 l. ou 1 par 19, le produit donnera 19 l., il est clair qu'en multipliant par la moitié de 1 l., ou 10 s., le produit sera la moitié de 19 l. ; la moitié de 19 l. est 9 l. pour 18 ; de 18 pour aller à 19, il reste 1, ou 1 l. qui vaut 20 s., dont la moitié est 10 s., que l'on placera à la colonne des sous

A l'égard de 2 s., seconde partie aliquote, dans lesquelles l'on a partagé 13, il faudra par un semblable raisonnement prendre le dixieme de 19 ; mais cela deviendroit difficile dans une quantité plus grande que 19 : ainsi l'on observera que 2 s. étant le cinquieme de 10 s., le produit de 2 s. par 19, sera le cinquieme du produit de 10 s. par 19. Or le produit de 10 s. par 19, est 9 l. 10 s. ; donc

celui de 2 ſ. par 19, ſera le cinquieme de 9 l. 10 ſ. : le cinquieme de 9 eſt 1 ; une fois 5 eſt 5 ; pour aller à 9, il reſte 4 l. qui valent 80 ſ., & 10 ſ. font 90 ſ., dont le cinquieme eſt 18 ſ., que l'on poſera à la colonne des ſous.

De même 1 ſou, derniere partie aliquote dans leſquelles l'on a diviſé 13 ſ., étant la moitié de 2 ſ., l'on prendra pour plus de commodité la moitié du produit de 2 ſ., c'eſt-à-dire la moitié de 1 l. 18 ſ. qui eſt 19 ſ.

Il reſte maintenant à multiplier 19 l. par 11 d. Pour cela, l'on obſervera le dernier produit 19 ſ. qui provient de la multiplication de 1 ſ. ou 12 d. par 19 l.; l'on diviſera 11 en parties aliquotes de 12 d. : or les parties aliquotes de 12 contenues dans 11, ſont 6, 3 & 2. Cela poſé, puiſque 1 ſ. ou 12 d. multiplié par 19 l. a produit 19 ſ., il eſt clair que 6 d., moitié de 1 ſou, étant multipliés par 19 l., donneront au produit la moitié de 19 ſ. qui eſt 9 ſ. 6 d.; puiſque 6 d. multipliés par 19 ſ. ont produit 9 ſ. 6 d., néceſſairement 3 d. qui ne ſont que la moitié de 6 d., donneront au produit la moitié de 9 ſ. 6 d., qui eſt 4 ſ. 9 d.; & par le même raiſonnement, on trouvera 3 ſ. 2 d. pour le

produit de la derniere partie aliquote, dans laquelle 11 d. ont été divisés.

Jusqu'ici l'on a multiplié 34 l. 13 s. 11 d. par 19 l.; il reste encore à multiplier 34 l. 13 s. 11 d. par 18 s.; & enfin 34 l. 13 s. 11 d. par 7 d.

Pour la premiere multiplication, l'on décomposera 18 s. en parties aliquotes de la livre ou de 20 s., ces trois parties seront 10, 4 & 4; l'on observera ensuite que si l'on avoit eu 1 livre ou 1 à multiplier par 34 l. 13 s. 11 d., le produit auroit été 34 l. 13 s. 11 d. Mais n'ayant à multiplier 34 l. 13 s. 11 d. que par 10 s., moitié de 1 livre, le produit sera la moitié de 34 l. 13 s. 11 d.; la moitié de 3 est 1; une fois 2 est 2; pour aller à 3, il reste 1 qui vaut 10, & 4 font 14: la moitié de 14 est 7: la moitié de 13 est 6 s. pour 12 s.: de 12 pour aller à 13, il reste 1, qui vaut 12 d., & 11 d. font 23 d., dont la moitié est 11 & $\frac{1}{2}$; l'on posera donc, pour la moitié de 34 l. 13 s. 11 d., la quantité 17 l. 6 s. 11 d. $\frac{1}{2}$.

En faisant les mêmes observations, & en consultant l'exemple que nous avons donné, il sera facile d'achever l'opération.

A l'égard de l'addition de ces différents produits, l'on commencera par les

fractions, en observant s'il ne seroit pas possible de réduire toutes les fractions au même dénominateur que la derniere $\frac{21}{30}$. Dans cet exemple, cela est possible; car en multipliant les deux termes de $\frac{1}{2}$ par 15, la nouvelle fraction est $\frac{15}{30}$, & les deux termes de la seconde $\frac{2}{5}$ étant multipliés par 6, donnent $\frac{12}{30}$; ainsi des autres.

Les fractions étant réduites en trentiemes, l'on ajoutera les numérateurs; & divisant leurs sommes par 30, le quotient 2 sera le nombre de deniers contenus dans ces fractions; l'on aura pour reste $\frac{6}{30}$ ou $\frac{1}{5}$; l'on posera $\frac{6}{30}$ ou $\frac{1}{5}$ à la colonne des fractions, & l'on portera les 2 deniers à la colonne des deniers, en disant: 2 & 6 font 8, & 9 font 17: l'on placera une petite marque * à côté de 9, & l'on retiendra 5; parce que de 12 pour aller à 17, il reste 5, & 2 font 7, & 11 font 18; l'on posera la même marque *, & l'on retiendra 6: 6 & 9 font 15; l'on posera la même marque *, & l'on retiendra 3; 3 & 9 font 12, &c. L'addition de cette colonne finie, l'on trouvera 2 à poser sous la colonne des unités, & l'on comptera le nombre des marques que l'on a placées; elles exprimeront le nombre de sous qu'il faut re-

tenir. L'on peut ſuivre la même méthode ſur le reſte des quantités ; elle eſt fort expéditive, lorſqu'il s'agit d'additionner des quantités complexes fort compoſées.

Si le multiplicande ou le multiplicateur ne contiennent, par exemple, que des quantités de la plus petite eſpece, qu'il faille multiplier par des quantités principales d'une eſpece quelconque, l'opération devient alors un peu plus embarraſſante.

L'on propoſe, par exemple, de multiplier

	l.	ſ.	d.
	39	19	3
Par . . .	0 .	0 .	4
Produit ſuppoſé de 5 ſ.	~~9~~ .	~~19~~ .	~~9~~
Produit ſuppoſé de 1 ſ.	~~1~~ .	~~19~~ .	~~11~~
Produit de 4 d. . . .	0 .	13 .	3
TOTAL	0 .	13 .	3

Si au lieu de 4 d. l'on avoit 5 ſ. à multiplier par 39 l. 19 ſ. 3 d., il ſuffiroit alors de prendre le quart de 39 l. 19 ſ. 3 d.; ce produit ſeroit 9 l. 19 ſ. 9 d.

Suppoſons encore une fois qu'au lieu de 5 ſ. nous ayions à multiplier par 1 ſ.;

alors le produit ſera le cinquieme de 5 ſ., ou 1 l. 19 ſ. 11. d. ; l'on barrera les deux produits provenus de ces ſuppoſitions ; parce que ce n'étoit ni par 5 ſ. ni par 1 ſ. qu'il falloit multiplier 39 l. 19 ſ. 3 d., mais par 4 d. Or l'on obſervera que le dernier produit 1 l. 19 ſ. 11 d. eſt celui de 1 ſ. ou 12 d. ; donc le produit réel de 4 d. par 39 l. 19 ſ. 3 d., ſera le tiers de 1 l. 19 ſ. 11 d., ou 13 ſ. 3 d. à très-peu de choſe près.

A l'égard des reſtes que l'on trouve ; lorſque l'on eſt arrivé à prendre le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, ou toute autre partie des plus petites ſous-eſpeces, l'on ſera le maître de les diſpoſer ſous la forme de fractions. Mais il eſt peut-être plus commode d'imaginer après les deniers une nouvelle ſous-eſpece dont il faudra un certain nombre pour compoſer un denier. L'on traitera ces ſous-eſpeces imaginées, de la même maniere que celles qui ſont reçues.

En général, pour multiplier une quantité complexe par une autre complexe ou non, l'on multipliera la plus haute eſpece du multiplicande par la plus haute eſpece du multiplicateur ; enſuite l'on décompoſera la premiere ſous-eſpece du multiplicande en parties aliquotes de l'eſpece dont elle

elle eſt ; & l'on multipliera la plus haute eſpece du multiplicateur par toutes les parties aliquotes que l'on vient de trouver.

A l'égard des ſous-eſpeces ſuivantes, l'on obſervera le dernier produit de l'eſpece précédente, & l'on décompoſera l'eſpece ſuivante en parties aliquotes de l'eſpece précédente ; l'on continuera enſuite la multiplication ſur le produit de la derniere partie aliquote de l'eſpece précédente.

Toutes les parties du multiplicande ayant été multipliées par la premiere partie du multiplicateur ; ſi ce dernier contient des ſous-eſpeces, il faudra les multiplier par toutes les parties du multiplicande ; alors le multiplicande aura été répété par toutes les parties du multiplicateur.

Ainſi l'on décompoſera les premieres ſous-eſpeces du multiplicateur en parties aliquotes de l'eſpece dont elles ſont, & l'on multipliera l'eſpece principale & les ſous-eſpeces du multiplicande par les parties aliquotes des premieres ſous-eſpeces du multiplicateur ; il en ſera de même des autres.

Si les ſous-eſpeces ſont trop éloignées de l'eſpece principale, alors l'on fera de faux produits ; c'eſt-à-dire que l'on ſuppoſera une ou pluſieurs unités de l'eſpece

précédente, ſauf enſuite à multiplier, ſuivant les principes, le produit de ces ſous-eſpeces ſuppoſées, par les ſous-eſpeces ſur leſquelles il faut opérer.

DE LA DIVISION.

DANS la diviſion des nombres complexes, il peut arriver que le dividende ſoit complexe & que le diviſeur ne le ſoit pas, ou le contraire ; il peut arriver auſſi qu'ils le ſoient l'un & l'autre. Comme les deux dernieres ſuppoſitions reviennent à la premiere après quelques préparations, nous nous occuperons un inſtant de cette premiere ſuppoſition.

Propoſons-nous de diviſer

39# 17s 4d	33# 0s 0d
33	1 . 4 . 2
6	
20	
120	
17	
137	
132	
5	
12	
64	

L'on divisera premierement 39 l. par 33, & l'on trouvera 1 l. au quotient & 6 l. de reste; mais 1 l. vaut 20 s., donc 6 l. vaudront 120 s., & 17 qu'il y a au dividende, feront 137, qui, divisés par 33, donneront 4 s. au quotient, & 5 s. de reste; mais 1 s. valant 12 d., 5 s. vaudront 60 d., & les 4 d. du dividende feront 64 d., qui, divisés par 33, donnent 2, à peu de chose près.

Telle est la maniere de diviser une quantité complexe par une autre qui ne l'est pas.

A l'égard du cas dans lequel l'on proposeroit de diviser un nombre complexe ou non, par un autre nombre complexe, il faut être prévenu des principes suivants.

En multipliant le dividende & le diviseur d'une division par une même quantité, l'on ne changera point de valeur au quotient; car en multipliant le dividende par un nombre quelconque, l'on rend ce même nombre autant de fois plus grand; donc alors il contiendra ce *même nombre de fois* plus le diviseur; mais en multipliant le diviseur par le même nombre, il sera contenu dans le dividende ce même nombre de fois moins;

donc le quotient, après cette multiplication ſur le diviſeur, ſera le même qu'il étoit auparavant. Il eſt inutile de prouver qu'il faut abſolument multiplier par la même quantité les deux termes de la diviſion.

Cela poſé, ſi l'on propoſoit de diviſer . . . 34 ₶ 7 ſ 3 ₰ | 19 ₶ 4 ſ 4 ₰ ;

puiſque le diviſeur indique toujours en combien de parties égales l'on doit partager le dividende, il faut néceſſairement qu'il ſoit un nombre entier; ainſi toutes les fois que le diviſeur aura des ſous-eſpeces, il faudra tâcher de les faire diſparoître en le multipliant par des nombres convenables.

Ces *nombres convenables* ſont aiſés à déterminer; il ſuffit pour cela d'obſerver la plus petite eſpece du diviſeur, & voir combien il faut d'unités de cette eſpece pour compoſer une unité de l'eſpece précédente. Par exemple, dans le diviſeur 19 l. 4 ſ. 4 d., comme la plus petite eſpece eſt 4 d., l'on multipliera le diviſeur par 12, parce que 1 ſ. contenant 12 d., quatre fois 12 d. donneront 4 ſ., & la plus petite eſpece 4 d. diſparoîtra. Après avoir

multiplié 19 l. 4 f. 4 d. par 12, l'on multipliera aussi 34 l. 7 f. 3 d. par 12; les deux nombres provenants de cette multiplication, feront 190 l. 12 f. & 412 l. 7 f. Il est clair que ces deux quantités ayant été multipliées par le même nombre, le quotient de 412 ## 7 ſ | 190 ## 12 ſ, fera le même que si la division eût été faite sur les nombres proposés.

Comme le diviseur contient encore les sous-especes 12 f., l'on multipliera les deux termes par 20, & l'on sera assuré de n'avoir point de sous-especes au diviseur. Les deux nouveaux nombres à diviser seront 8247 | 3812, dans lesquels il n'y a plus de sous-especes; l'on divisera ces deux, nombres suivant les méthodes que nous avons données.

En général, lorsqu'il s'agira de diviser une quantité complexe ou non, par une quantité complexe, l'on observera les dernieres sous-especes du diviseur, & l'on multipliera les deux termes de la division par le nombre de fois que ces sous-especes sont contenues dans l'espece précédente. Par cette opération, les plus

petites especes du diviseur disparoîtront. L'on fera les mêmes observations sur les sous-especes qui pourroient encore rester dans le diviseur, en faisant attention de multiplier toujours le dividende par la même quantité que l'on a multiplié le diviseur; & cela, quelle que soit la nature des sous-especes du dividende.

Lorsque les sous-especes du diviseur auront disparu, l'on fera la division, parce qu'il est inutile que les sous-especes du dividende disparoissent ou non.

Preuve des quatre Regles.

Lorsque l'on a fait une addition complexe ou non, & que l'on veut reconnoître si elle est exacte, il faudra retrancher de la somme des quantités la somme de ces mêmes quantités, excepté la premiere, & le reste donnera la premiere quantité. Par exemple, pour vérifier l'addition:

	749
	347
	23
Somme totale	1119
Somme des deux dernieres .	370
Reste	749

De la somme 1119 des trois quantités,

l'on retranchera 370, somme des deux dernieres quantités, & le reste 749 donnera la premiere quantité.

Effectivement, puisque 1119 renferme la somme des trois quantités, si de cette somme l'on retranche celle de deux de ces quantités, le reste sera la troisieme.

PREUVE de la Soustraction.

POUR reconnoître si une soustraction est exacte, il suffira d'ajouter la quantité à soustraire avec le reste, & la somme sera la quantité de laquelle l'on a soustrait. Par exemple, pour vérifier la soustraction:

3470
2934
536 reste.
3470 somme.

L'on ajoutera le reste 536 à la quantité à soustraire 2934, & la somme 3470 sera la quantité de laquelle l'on a soustrait. En effet, puisque 536 exprime l'excès de 3470 sur 2934; si l'on ajoute cet excès à 2934, la somme doit donner la premiere quantité 3470.

PREUVE de la Multiplication.

POUR reconnoître si le produit d'une multiplication est exact, il suffit de le diviser par le multiplicande ou par le multiplicateur ; & le quotient donnera le multiplicateur ou le multiplicande. Par exemple, pour vérifier la multiplication :

```
            347
             23
           ----
           1940
           6041
           ----
Produit... 7981 | 23  multiplicateur.
           ---- | ---
            69  | 347 multiplicande.
           ---
           108
            92
           ---
            161
            161
           ---
            000
```

L'on divisera le produit 7981 par le multiplicateur 23 ; & le quotient 347 sera égal au multiplicande. En effet 7981 est égal à vingt-trois fois 347 ; donc la vingt-troisieme partie de 7981 donnera 347 ou le multiplicande.

PREUVE de la Division.

POUR reconnoître si le quotient d'une division est exact, il faut le multiplier par le diviseur, & ajouter au produit le reste, s'il y en a un; la somme donnera le dividende. Par exemple, pour vérifier la division :

347	22
22	15
127	
110	
17	

22	diviseur.
15	quotient.
110	
220	
17	reste.
347	dividende.

L'on multipliera le quotient 15 par le diviseur 22, & l'on ajoutera 17 au produit; la somme 347 sera égale au dividende. En effet la vingt-deuxieme partie de 347 étant 15, avec un reste de 17, nécessairement quinze fois 22 plus ce reste 17, doivent donner 347. Il sera facile de faire les mêmes vérifications sur les nombres complexes.

Comme pour abréger les expressions,

nous nous servirons de quelques signes convenus, il est nécessaire d'en prévenir le Lecteur.

+ *signifie* plus
− . . . . . moins
= . . . . . égal
× . . . . . multiplié par
$\frac{A}{B}$ . . . . . A divisé par B

Si l'on veut écrire, d'après ces signes, que les deux quantités 4 & 4 sont égales, l'on écrira $4 = 4$. Lorsque l'on multiplie les deux termes d'une égalité $4 = 4$ par la même quantité 3, les produits 12 & 12 qui résulteront, seront encore égaux ; ce qui n'a pas besoin de preuve : il en seroit de même, si l'on divisoit les deux termes par la même quantité.

Des Proportions géométriques.

L'ON appelle *rapport* le résultat de la comparaison de deux grandeurs. Ce résultat peut se déterminer en divisant l'une des quantités par l'autre ; & alors le résultat ou rapport est appellé *rapport géométrique*. Ainsi si l'on compare les deux quantités 8 & 4, en cherchant combien de fois 4 est contenu dans 8, le quotient 2 sera le rapport géométrique de

8 à 4. L'on écrit ordinairement un rapport géométrique de cette maniere 8 : 4. Le ſigne : ſe prononce *eſt à.*

Une proportion géométrique eſt la comparaiſon de deux rapports géométriques égaux. Par exemple, ſi l'on compare les deux rapports égaux 8 : 4, & 12 : 6, cette comparaiſon qui s'écrit de cette maniere $8 \overset{2}{:} 4 :: 12 \overset{2}{:} 6$, eſt une proportion géométrique. Le ſigne : : s'énonce *comme*; & la proportion s'énonce de cette maniere, 8 eſt à 4 comme 12 eſt à 6; c'eſt-à-dire que 8 contient 4 autant de fois que 12 contient 6.

Puiſque 8 contient 4 deux fois, 4 ſera égal à 8 diviſé par 2; c'eſt-à-dire que dans ce cas le ſecond terme de la proportion eſt égal au premier diviſé par le rapport; donc le quatrieme ſera égal auſſi au troiſieme diviſé par le rapport. Mais les deux rapports ſont égaux; donc $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$. Multipliant chaque terme de l'égalité par 6, l'on aura $\frac{8 \times 6}{4} = \frac{12 \times 6}{6}$. Mais la quantité 12 eſt multipliée & diviſée par le même nombre 6; donc $\frac{8 \times 6}{4} = 12$; c'eſt-à-dire que le troiſieme terme eſt égal au produit

du premier par le quatrieme, & divisé par le second.

La même égalité $\frac{8 \times 6}{4} = 12$ donne, en multipliant chaque nombre par 4, $8 \times 6 = 12 \times 4$; c'est-à-dire que dans toute proportion géométrique le produit des deux termes extrêmes est toujours égal au produit des deux termes moyens.

La même égalité $8 \times 6 = 12 \times 4$, donne encore, en divisant chaque membre par 8, $6 = \frac{12 \times 4}{8}$; ce qui fait voir que le quatrieme terme d'une proportion géométrique est égal au produit des deux termes moyens divisés par l'extrême connu.

Puisque dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, toutes les fois qu'on reconnoîtra cette propriété dans quatre termes donnés, l'on conclura qu'ils sont en proportion.

Si quatre quantités $a : b :: c : d$ sont en proportion géométrique, l'on pourra changer cette proportion de toutes les manieres suivantes.

I.

Si $a : b :: c : d$, l'on aura $b : a :: d : c$, ou $d : c :: b : a$; car dans la premiere proportion, l'on a, $a \times d = b \times c$. Mais

dans les ſeconds changements, le produit des extrêmes & des moyens ſont les mêmes que dans la premiere proportion; & comme ils ſont égaux dans la premiere, les mêmes produits le ſeront auſſi dans les derniers changements; donc ces changements ont lieu.

II.

Si $a : b :: c : d$, l'on aura $a : c :: b : d$; car, dans le premier changement comme dans le ſecond, le produit $a \times d = b \times c$.

III.

Si $a : b :: c : d$, l'on aura $a + b : b :: c + d : d$; car le produit des extrêmes de ce nouveau changement eſt $a \times d + b \times d$; & celui des moyens, eſt $b \times c + b \times d$. Mais, par l'hypotheſe, $a \times d = b \times c$; ajoutant à chaque membre la même grandeur $b \times d$, on aura $a \times d + b \times d = b \times c + b \times d$. Mais ces deux quantités égales ſont les produits des extrêmes & des moyens du ſecond changement; donc ce changement a lieu. Il en ſeroit de même de celui-ci $a + b : a :: c + d : c$.

IV.

Si $a : b :: c : d$, l'on aura $a - b : b :: c - d : d$; car le produit des extrêmes de ce changement eſt $a \times d - b \times d$; & celui des moyens eſt $b \times c - b \times d$. Mais, par hypo-

these, $a \times d = b \times c$, si de ces deux quantités égales l'on retranche une même grandeur $b \times d$, les restes seront égaux; donc $a \times b - b \times d = b \times c - b \times d$. Mais ces produits sont ceux des extrêmes & des moyens du dernier changement; donc il a lieu. Il en seroit de même de celui-ci, $a - b : a :: c - d : c$.

On est convenu d'appeller le premier changement *invertendo*, le second *alternando*, le troisieme *componendo*, & le quatrieme *dividendo*.

Lorsque $a : b :: c : d$, & que $c : d :: e : f$, & que $e : f :: g : h$, &c., l'on conclura $a : b :: g : h$; cela s'appelle *conclure du premier rapport au dernier*.

Car le rapport de a à b étant le même que celui de c à d, & celui-ci le même que celui de e à f, & ce dernier le même que celui de g à h, il est clair que le rapport de a à b sera encore le même que celui de g à h; donc ces rapports sont égaux; donc $a : b :: g : h$.

Si dans une proportion $a : b :: c : d$, les antécédents a & c sont égaux; c'est-à-dire, si $a = c$, l'on aura $b = d$; car si $a : b :: c : d$, l'on aura $a \times d = b \times c$; mais $a = c$; donc en divisant les deux quantités égales $a \times d$ & $b \times c$ par les gran-

deurs égales a & c, les quotients feront égaux ; donc $\frac{a \times d}{d} = a$, & $\frac{b \times c}{c} = b$; donc $a = b$. Il en feroit de même fi les conféquents étoient égaux.

En divifant les deux termes d'un rapport, ou en les multipliant par la même quantité, les rapports ne changent point; c'eft-à-dire, fi $a : b :: c : d$, l'on aura $a : b :: \frac{c}{2} : \frac{d}{2}$; ou $a : b :: \frac{c}{3} : \frac{d}{3}$, &c. ; & l'on aura auffi $a : b :: 2c : 2d$; ou comme $3c : 3d$, &c. ; car puifque $a : b :: c : d$, l'on aura $a \times d = b \times c$; mais les touts étant égaux, leurs moitiés feront égales ; donc $a \times \frac{d}{2} = b \times \frac{c}{2}$; remettant cette égalité en proportion, l'on aura $a : b :: \frac{c}{2} : \frac{d}{2}$. L'on formeroit la même démonftration pour les autres cas.

Si l'on a deux propofitions $a : b :: c : d$, & $e : f :: g : h$, en multipliant terme par terme, les produits qui réfulteront, feront encore en proportion ; c'eft-à-dire que l'on aura $a \times e : b \times f :: c \times g : d \times h$; car puifque $a : b :: c : d$, l'on aura $a \times d = b \times c$; de même dans l'autre proportion $e \times h = f \times g$. Mais deux quantités égales étant multipliées par deux

autres quantités égales, donnent des produits égaux ; car ſi $8 = 8$, par exemple, quatre fois, cinq fois, ſix fois 8, &c. ſera égal à quatre fois, cinq fois, ſix fois 8, donc $a \times d \times e \times h = b \times c \times f \times g$; mais ces quantités ſont les produits des extrêmes & des moyens du changement que nous voulons démontrer ; puiſqu'ils ſont égaux, le changement aura lieu.

Il en feroit de même ſi au lieu de multiplier deux proportions terme par terme, l'on diviſoit les quatre termes de la premiere par les quatre termes correſpondants de la ſeconde ; alors les quatre quotients qui réſulteroient de la diviſion feroient encore en proportion.

Définition.

Le quarré d'une quantité a, eſt cette quantité multipliée par elle-même ; ainſi $a \times a$ eſt le quarré de a, & l'on appelle *racine* la quantité qui a été multipliée ; ainſi a eſt la racine de $a \times a$. L'on eſt convenu de marquer le quarré d'une quantité par ce ſigne $\overline{\ \ }^2$; ainſi $\bar{a}^2$ exprime le quarré de a. L'on a encore un ſigne pour exprimer une racine ; ce ſigne eſt celui-ci $\sqrt{\quad}$. L'on poſe la quantité, dont on veut prendre la racine, ſous le ſigne ; ainſi a, ou $\sqrt{\bar{a}^2}$, eſt la même choſe.

Lorſqu'une

Lorsqu'une fois l'on est en état de déterminer le quatrieme terme d'une proportion géométrique, il est facile de résoudre les questions de cette nature. Par exemple, si 39 aunes de toile coûtent 34 l., combien 70 aunes de la même toile coûteront-elles? C'est-à-dire que la toile étant de la même espece, les 39 aunes par rapport au prix 34 l., doivent être proportionnées aux 70 aunes par rapport au prix que l'on ne connoît pas; donc 39 : 34 :: 70 est à un quatrieme terme, que l'on trouvera de 61 l. 0 s. 6 d. à peu de chose près.

De même si 40 ouvriers font 50 toises d'ouvrage, combien 45 ouvriers en feront-ils? L'on aura 40 : 50 :: 45 : 56 t. 1 P.; c'est-à-dire que l'ouvrage fait par les 45 ouvriers sera 56 t. 1 P., à peu de chose près.

Ces sortes de regles se nomment *Regles de Trois*, parce qu'il s'agit de déterminer le quatrieme terme d'une proportion dont on connoît *trois* termes.

Il est encore une autre espece de regle de Trois qu'il ne faut point confondre avec celle-ci. Par exemple, si 1500 hommes ont des vivres pour 13 mois, pour combien de mois en auroient-ils s'ils n'étoient que 800 hommes?

Par l'énoncé de la queſtion, l'on voit aiſément que moins il y aura d'hommes, plus ils emploieront de temps à conſommer les vivres. Ainſi les quantités 1500 hommes & 800 hommes ne ſont pas proportionnelles à 13 mois & au nombre de mois que l'on cherche. En effet il feroit abſurde d'écrire, d'après cet énoncé, $1500 : 13 :: 800 : \frac{800 \times 13}{1500}$; car dans l'énoncé le quatrieme terme ſera d'autant plus grand que le troiſieme ſera plus petit; & le ſecond ſera d'autant plus petit que le premier ſera plus conſidérable. Sans chercher à diſpoſer ces ſortes de regles en proportion, il ſera plus ſimple de les réſoudre d'après l'énoncé même. Ainſi, puiſque 1500 hommes ont dans 13 mois les mêmes vivres que 800 hommes dans le même nombre de mois que l'on cherche, il eſt clair qu'en appellant A ce nombre de mois inconnu, l'on aura $1500 \times 13 = 800 \times A$; donc A, ou le nombre de mois inconnu, ſera égal à $\frac{1500 \times 13}{800}$; car 800 fois A eſt égal à 1500×13; donc la huit-centieme partie de 1500 multipliée par 13, ſera égale au nombre de mois cherché.

De même ſi 15 ouvriers emploient

30 jours à faire un ouvrage, combien faudra-t-il de jours à 50 ouvriers pour faire le même ouvrage ? L'on voit bien aisément que plus on emploiera d'ouvriers, moins il faudra de jours pour achever l'ouvrage. Ainsi il seroit faux d'écrire 15 : 30 :: 50 : $\frac{50 \times 30}{15}$. Mais il est clair que 15 ouvriers dans 30 jours, ou 15 multipliés par 30, acheveront l'ouvrage, de même que 50 dans A de jours que l'on cherche ; donc 15 × 30 = 50 × A ; donc enfin A, ou le nombre de jours que l'on cherche, sera égal à $\frac{30 \times 15}{50}$.

Ces sortes de regles s'appellent *Regles de Trois inverses*. Ainsi, avant de résoudre une regle de Trois donnée, il faudra exactement étudier l'énoncé, pour savoir si elle est directe ou inverse. Il est encore d'autres especes de regles de Trois que l'on nomme *composées*, parce qu'effectivement elles sont composées de plus de trois termes. Mais pour peu d'attention que l'on fasse à l'énoncé, l'on ramenera ces sortes de questions aux regles de Trois simples.

Par exemple, si 30 hommes dans 15 jours font 150 toises d'ouvrage, com-

bien 50 hommes dans 8 jours feront-ils de toiſes ? Il eſt clair que 30 hommes dans 15 jours ne feront pas plus d'ouvrage que 15 fois 30 hommes, ou 450 hommes dans 1 jour ; de même 50 hommes dans 8 jours ne feront pas plus d'ouvrage que huit fois 50 hommes ou 400 hommes dans 1 jour ; la regle de Trois compoſée ſe réduira donc à celle-ci : Si 450 hommes font 150 toiſes d'ouvrage, combien 400 feront-ils d'ouvrage ? & alors la regle eſt une *regle de Trois ſimple.*

APPLICATION des principes précédents à quelques queſtions ſur les intérêts.

PLACER une ſomme à intérêt, c'eſt exiger d'une ſomme que l'on prête, un bénéfice annuel qui ſuit ordinairement le taux que le prince impoſe. Par exemple, placer une ſomme au cinq pour cent, c'eſt exiger 5 l. pour chaque 100 l. que contient la ſomme placée. Ce revenu annuel de 5 l. ſur 100 l. s'appelle l'intérêt au cinq pour cent.

De même lorſque l'on place une ſomme au ſix pour cent, au ſept pour cent, au huit pour cent, &c., l'on exige un revenu annuel de 6 l., 7 l., 8 liv. ſur chaque 100 l. que l'on prête.

Lorſque l'on exige les 4 d. pour livre, les 5 d., 6 d., 7 d., &c. pour livre d'une ſomme, l'on prend ſur chaque livre 4 d., 5 d., 6 d., 7d., &c. qui compoſent la ſomme donnée.

Cela bien entendu, rien n'eſt plus ſimple que de déterminer l'intérêt d'une ſomme quelconque, & de déterminer la ſomme, en connoiſſant l'intérêt.

Quel eſt, par exemple, l'intérêt de 3478 l. 17 ſ. 8 d.? Puiſque ſur chaque 100 l. l'on doit prendre 5 l., l'on doit établir cette proportion : Si ſur 100 l. l'on prend 5 l., ſur 3478 l. 17 ſ. 8 d., combien prendra-t-on de livres? C'eſt-à-dire 100 : 5 :: 3478 l. 17 ſ. 8d. : 173 l. 18 ſ. 10 d. à très-peu de choſe près, pour l'intérêt. Les deux termes du premier rapport, 100 : 5, pouvant ſe diviſer par 5, le nouveau rapport égal au premier ſera 20 : 1; donc 20 : 1 :: 3478 l. 17 ſ. 8 d. eſt à un quatrieme terme. Mais l'unité ne multiplie pas, il ſuffira donc de prendre le vingtieme de la ſomme propoſée; donc pour prendre l'intérêt d'une ſomme au 5 pour 100, il ſuffira de diviſer la ſomme par 20.

L'on ſe conduira de même pour prendre le 4 pour 100, le 6 pour 100, &c. de la ſomme propoſée; l'on obſervera,

à l'égard du 4 pour 100, que le premier rapport, 100 : 4, peut ſe changer en celui-ci, 25 : 1 ; parce que l'on peut diviſer les deux termes par la même quantité 4 ; donc pour prendre le 4 pour 100 d'une ſomme propoſée, l'on diviſera cette ſomme par 25. L'on peut faire la même obſervation ſur les autres taux.

En général, pour prendre l'intérêt d'une ſomme, il faudra la multiplier par l'intérêt qu'on veut retirer toutes les années ſur 100 l. ou ſur un autre nombre de livres convenu, & diviſer le produit par ce nombre convenu.

Quelquefois l'on exige d'une ſomme le 3 & $\frac{1}{2}$, le 4 & $\frac{1}{2}$, ou le 5 & $\frac{1}{4}$ pour 100 ; mais rien n'eſt plus facile que de réduire ce *denier* à une fraction ſimple : car prendre les 3 & $\frac{1}{2}$ pour 100 d'une ſomme, c'eſt, en ſuivant la regle générale, multiplier cette ſomme par $\frac{3\frac{1}{2}}{100}$, ou en réduiſant le numérateur en une fraction ſimple $\frac{(\frac{7}{2})}{100}$; mais $(\frac{7}{2})$ diviſé par 100, donne $\frac{7}{200}$: donc prendre les 3 $\frac{1}{2}$ pour 100 d'une ſomme, c'eſt la multiplier par $\frac{7}{200}$: l'on réduira de même les autres taux fractionnaires.

A l'égard des 4 d., 5 d., 6 d., &c. pour livre, c'eſt prendre 4 d., 5 d., ou 6 d. ſur 1 l. ou 240 d. ; donc prendre les 4 d. pour livre d'une ſomme, c'eſt la multiplier par $\frac{4}{240}$ ou $\frac{1}{60}$. Les 5 d. pour livre ſeront $\frac{5}{240}$ ou $\frac{1}{48}$; de même les 3 d. pour livre ſeront $\frac{3}{240}$ ou $\frac{1}{80}$. Il ſuffira donc de multiplier la ſomme propoſée par l'une des fractions dont il s'agira.

L'intérêt 173 l. 18 ſ. 10 d. d'une ſomme placée au 5 pour 100, étant connu, déterminer la ſomme placée. Pour réſoudre cette queſtion, il ſuffit d'établir cette proportion : Si 5 l. d'intérêt proviennent de 100 l. de capital, de quelle ſomme proviendra l'intérêt 173 l. 18 ſ. 10 d. ? C'eſt-à-dire 5 : 100 : : 173 l. 18 ſ. 10 d. : 3478 l. 17 ſ. 8 d. qui ſera la ſomme placée. Mais le rapport de 5 à 100 ſe réduit de 1 à 20 ; & comme l'unité ne diviſe pas, il ſuffira de multiplier par 20 l'intérêt propoſé.

En général l'intérêt d'une ſomme étant connu ; pour déterminer la ſomme, il ſuffit de multiplier l'intérêt par la fraction inverſe du taux, en faiſant attention de ſimplifier la fraction du taux, ſi cela eſt poſſible, avant de commencer la multiplication.

Nous nous ſommes contentés, comme on le voit, d'indiquer les méthodes générales; il peut y avoir d'autres moyens pour réſoudre plus expéditivement ces ſortes de queſtions; mais il nous a paru inutile d'entrer dans de plus grands détails.

Il eſt encore une autre eſpece de regle, que l'on nomme *Regle de Compagnie*; elle conſiſte à partager un nombre propoſé, en parties proportionnelles à celles d'un nombre donné. Par exemple, trois freres jouiſſent enſemble du bien de leur pere, qui conſiſtoit en 34000 l.; cependant les volontés du teſtateur étoient de donner à l'ainé 18400 l.; au ſecond, 12000 l., & au troiſieme, 4000 l. Mais ces freres ayant géré les biens pendant un certain temps, ont gagné en maſſe 15000 l. Quelle eſt la part que chacun d'eux doit avoir au gain, outre leur portion?

Il eſt clair que puiſque le gain 15000 l. s'eſt fait en raiſon des miſes des trois freres; il eſt clair, dis-je, que ce ſont les 34000 l. qui ont gagné 15000 l.: établiſſons donc ces trois proportions: Si 34000 l., ſomme des parties, eſt à 15000 l. gain total; Quel ſera le gain de celui qui a mis

18400l. ? Quel ſera le gain de celui qui a mis 12000 l. ? Enfin quel ſera le gain du troiſieme qui a mis 4000 l. ?

En général, la ſomme des parties proportionnelles eſt à chacune d'elles comme le nombre qu'il s'agit de diviſer eſt à chacune des parties correſpondantes.

Nous ne nous étendrons pas davantage ſur ces ſortes de queſtions, parce qu'en réfléchiſſant un peu ſur le principe, rien n'eſt plus ſimple que de les réſoudre. Au reſte, l'on ne doit pas perdre de vue que cet Ouvrage eſt entiérement conſacré à ceux qui veulent s'en tenir aux uſages utiles de la Géométrie Elémentaire.





LIVRE SECOND.

Principes de Géométrie pour ceux qui veulent s'en tenir uniquement aux opérations ſur le terrein.

LA Géométrie eſt la ſcience de l'étendue. L'on conſidere trois ſortes d'étendues ; *la ligne*, *la ſurface*, & *le ſolide*.

La *ligne*, eſt une étendue en longueur ſeulement. Ainſi le rayon qui frappe l'œil de l'obſervateur en regardant un objet, eſt préciſément ce que l'on appelle *ligne*.

La *ſurface*, eſt une étendue en largeur & longueur ſeulement. Ainſi tout ce qui frappe la vue, en regardant les corps, eſt *ſurface*.

Le *ſolide*, a trois dimentions; *longueur*, *largeur* & *épaiſſeur*, ou *hauteur*.

L'objet de la Géométrie eſt de déterminer les propriétés de ces trois étendues, ſéparément, & combinées enſemble.

FIG. 1. Une ligne droite eſt le plus court chemin d'un point à un autre. Ainſi dans un eſpace terminé par trois lignes droites AD, BD & AB, deux d'entr'elles AD + DB, ſont plus grandes que la troiſieme AB.

Deux lignes peuvent avoir deux ſituations différentes à l'égard l'une de l'autre. 1.° Elles peuvent tendre à ſe rencontrer, ou ſe rencontrer effectivement. 2.° Elles peuvent être également éloignées dans tous leurs points.

Deux lignes EC & AD, peuvent ſe rencontrer dans deux ſituations différentes. Par exemple, la ligne EC peut pencher plus d'un côté que d'autre ſur la ligne AD. Toute ligne dans cette poſiſition, s'appelle *oblique*. Fig. 2.

Enfin, FC peut rencontrer AD ſans être inclinée plus d'un côté que d'autre. La ligne FC dans cette poſition, s'appelle *perpendiculaire*.

De ce que FC ne penche pas plus d'un côté que d'autre ſur AD, il eſt aiſé d'en conclure que la *perpendiculaire* eſt le plus court chemin d'un point à une ligne; car ſi l'on imagine être placé au point C, & parcourir la ligne CD; comme les deux points C & F ſont fixes, à meſure que l'on s'écartera du point C l'on s'éloignera auſſi du point F; donc FA, FB, FD, ſont plus grands que FC; donc le plus court chemin d'un point à un ligne, eſt la perpendiculaire.

Lorſque deux lignes AB & DC ſont Fig. 3.

également éloignées l'une de l'autre, elles ſont appellées *paralleles*, & alors les deux perpendiculaires A D & B C qu'elles comprennent, ſont égales, puiſqu'elles repréſentent les chemins les plus courts de la ligne A B à la ligne D C, & que ces lignes par conſtruction ſont également éloignées l'une de l'autre ; donc deux lignes paralleles prolongées à l'infini, ne ſe rencontreront jamais, puiſque ſi elles ſe rencontroient en quelques points, elles ſeroient alors dans une ſituation contraire à celle qu'on leur ſuppoſe.

FIG. 4. L'on appelle *circonférence*, une ligne courbe B C D F, dont tous les points ſont également éloignés d'un même point E que l'on appelle *centre* ; l'eſpace terminé par la circonférence, s'appelle *cercle* ; les lignes F E menées du centre à la circonférence, ſe nomment *rayons* : donc tous les rayons d'un même cercle ſont égaux, puiſque leur origine E eſt également éloignée de tous les points où ils ſe terminent.

La ligne E C, &c., qui paſſe par le centre & ſe termine de part & d'autre à la circonférence, s'appelle *diametre* ; donc le diametre eſt double du rayon ; donc les diametres d'un même cercle ſont égaux.

L'on eſt convenu de diviſer la circonférence en 360 parties égales que l'on nomme *dégrés ;* chaque dégré en 60 parties égales, appellées *minutes ;* celles-ci en 60 parties égales, que l'on nomme *ſecondes.* Un dégré ſe déſigne par °; une minute, par ′; une ſeconde, par ″, &c.

Si l'on mene de deux points F & C, pris ſur la circonférence, deux lignes FE & EC, au centre ; ces deux lignes formeront par leur rencontre une *encoignure* que l'on nomme *angle.*

L'on n'eſt convenu de diviſer la circonférence en 360 parties égales, que pour fixer l'ouverture des angles. Comme ils peuvent être plus ou moins ouverts à meſure que les côtés FE & EC ſeront plus ou moins rapprochés ; alors les arcs FC & FA ſeront plus ou moins grands : donc ſi FC contient un certain nombre de dégrés, FA qui en contiendra un plus petit nombre, indiquera de combien l'angle FEA eſt plus petit que l'angle FEC. Les parties FC & FA d'une circonférence, ſe nomment *arcs ;* donc la meſure de tout angle qui aura ſon ſommet au centre, ſera l'arc compris entre ſes côtés, parce qu'effectivement l'arc

étant plus ou moins grand, indiquera que les côtés ſont plus ou moins rapprochés, & l'ouverture plus ou moins grande.

Le rayon BE étant perpendiculaire ſur le diametre AC, les angles BEA & BEC feront égaux, puiſque la perpendiculaire, par ſa ſituation, ne doit pas pencher plus d'un côté que d'autre ſur la ligne qu'elle rencontre. Les deux angles BEA & BEC étant égaux, leurs meſures feront égales; donc l'arc BA égal l'arc BC.

Les deux angles BEA & BEC que forme la perpendiculaire, ſont appellés *droits;* donc la demi-circonférence ABC vaudra deux droits; mais la valeur de la demi-circonférence eſt 180 dégrés, donc la valeur ou la meſure d'un angle droit ſera de 90 dégrés; donc ſi une oblique FE rencontre une droite AC, les angles FEC & FEA que l'on nomme *angles de ſuite*, vaudront deux angles droits, puiſque ces deux angles ont pour meſure les arcs FA & FC qui compoſent la demi-circonférence.

L'on eſt convenu d'appeller *complément* d'un angle ce qui lui manque pour valoir un droit; ainſi FEB eſt le complément de FEA.

L'on eſt auſſi convenu d'appeller *ſup-*

plément d'un angle ce qui lui manque pour valoir deux angles droits, ou 180 dégrés ; ainsi FEC est le supplément de FEA.

Principe.

Si deux lignes droites AE & CD se coupent au point B, les angles de DBE & ABC opposés par le sommet, seront égaux : car CBA + ABD valent deux droits, comme angles de suite ; par la même raison ABD + DBE valent deux droits. Ces deux quantités étant égales chacune à la même grandeur *deux droits*, seront égales entr'elles ; donc CBA + ABD = ABD + DBE ; & retranchant de ces deux quantités égales une même grandeur ABD, les restes seront égaux ; donc CBA = DBE ; donc les angles opposés par le sommet sont égaux. Fig. 5.

Nous avons dit précédemment, que deux lignes sont paralleles, lorsqu'elles sont également éloignées l'une de l'autre. Cela posé, si deux paralleles AC & DF sont coupées par une droite HG, les deux angles ABE & DEG seront égaux. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que la droite HG ne changeant point de situation, si l'une des paralleles DF s'approche Fig. 6.

de AC en conservant à l'égard de AC sa même position, il est clair que DF pourra se confondre avec AC ; & alors les angles ABE & DEG seront égaux : donc ils seront aussi égaux dans la position supposée ; les angles égaux ABE & DEG sont appellés *internes externes* du même côté.

Donc toutes les fois que deux lignes AC & DF seront coupées par une troisieme ligne HG, & que les angles internes externes seront égaux, alors les lignes seront paralleles.

DEG est donc égal à ABE ; mais DEG = BEF, comme opposés au sommet ; donc ABE = BEF. Ces angles sont appellés *alternes internes*. Donc toutes les fois que deux lignes seront coupées par une troisieme, & que les angles alternes internes seront égaux, les lignes seront paralleles.

BEF = HBC, mais BEF = DEG ; donc HBC = DEG. Ces angles sont appellés *alternes externes*. Donc toutes les fois que les angles alternes externes seront égaux, les lignes seront paralleles.

DEB + DEG valent deux droits. DEG = ABE ; donc au lieu de DEG, l'on pourra substituer ABE, & l'on aura

DEB

DEB + ABE égal à deux droits ou à 180 dégrés ; ces angles sont appellés *internes* du même côté ; donc toutes les fois que les angles internes du même côté vaudront deux droits, les lignes seront paralleles.

DEB + DEG valent deux droits ; mais DEB = ABH ; donc DEG + ABH vaudront deux droits. Ces angles sont appellés *externes* du même côté. Donc toutes les fois que les angles externes du même côté vaudront deux droits, l'on en conclura le parallélisme des lignes.

DÉFINITION.

L'ON appelle *triangle* un espace renfermé par trois côtés ; ainsi ABC est un triangle. Fig. 7.

Si sur le milieu d'une ligne AC l'on imagine une perpendiculaire BD, & que du point B l'on mene les deux lignes BA & BC, elles seront égales ; c'est-à-dire que le triangle ABC aura ces deux côtés BA & BC égaux.

Car imaginons une charniere dans la perpendiculaire BD, & plions le triangle BDC sur le triangle BDA ; comme les deux angles BDC & BDA sont égaux, & que le côté BD tourne sur lui-même, il est clair que DC tombera sur DA ; &

comme nous ſuppoſons DC = DA, le point C tombera ſur le point A ; donc BC ſe confondra avec BA ; donc les deux ouvertures BAC & BCD feront égales : c'eſt-à-dire que les angles BAC & BCA feront égaux ; donc auſſi les côtés BA & BC feront égaux.

Un triangle, tel que ABC, dont deux côtés AB & BC ſont égaux, eſt appellé *iſoſcele* ; donc dans un triangle iſoſcele les angles oppoſés aux côtés égaux, ſont égaux ; donc auſſi, dans un triangle iſoſcele, la perpendiculaire abaiſſée du *ſommet* B ſur la *baſe* AC diviſe cette baſe en deux également ; car le triangle ABC étant iſoſcele, AB = BC ; donc le point B eſt également éloigné des points A & C. Mais une perpendiculaire ne doit pas pencher plus d'un côté que d'autre ſur une ligne ; donc BD fera dans cette poſition lorſqu'elle fera menée de B ſur le milieu de AC, parce que les points B & D étant également éloignés des extrêmités A & C, la droite BD ne penche pas plus d'un côté que d'autre ; donc elle eſt perpendiculaire ; donc, dans un triangle iſoſcele, la perpendiculaire abaiſſée du *ſommet* B ſur la baſe AC, diviſe cette baſe en deux également.

Si dans un triangle BAD l'on prolonge un des côtés BD, l'angle ADE que forment ce prolongement & le côté contigu AD, eſt appellé *angle extérieur.* Fig. 8.

Principe.

L'angle extérieur d'un triangle eſt toujours égal à la ſomme des deux angles intérieurs oppoſés ; c'eſt-à-dire que l'angle ADE eſt égal à BAD + ABD. Fig. 8.

Pour le prouver, imaginons la ligne CD parallele à AB ; l'angle ADC ſera égal à l'angle BAD, & l'angle CDE ſera égal à l'angle ABD ; donc la ſomme des deux angles ADC & CDE, ou l'angle extérieur ADE, ſera égale à la ſomme des angles BAD & ABD, c'eſt-à-dire égale à la ſomme des deux angles intérieurs oppoſés (c . q . f . d). Si à ces deux quantités égales, l'on ajoute le même angle ADB, les ſommes ſeront égales ; donc ADE + ADB = BAD + ABD + ADB. Mais ADE + ADB valent deux droits comme angles de ſuite ; donc la ſomme des trois angles d'un triangle vaudra deux angles droits.

Donc ſi deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troiſieme angle du premier ſera égal au troiſieme du ſecond ; car les trois

angles d'un triangle valant deux droits, il eſt clair que la ſomme des trois angles d'un triangle ſera égale à la ſomme des trois angles d'un autre triangle ; & ſi deux angles du premier ſont égaux à deux angles du ſecond, en retranchant cette ſeconde égalité de la premiere les reſtes ſeront égaux ; c'eſt-à-dire que le troiſieme angle du premier ſera égal au troiſieme angle du ſecond.

Du même principe, il eſt encore facile de conclure la meſure des angles.

Un angle peut avoir ſon ſommet à la circonférence, & ſes côtés appuyés ſur un arc ; tel eſt l'angle ABE (fig. 9). Il peut avoir ſon ſommet hors du cercle, & ſes côtés appuyés ſur la circonférence ; tel eſt l'angle ACD (fig. 10.).

Il peut avoir ſon ſommet entre le centre & la circonférence ; tel eſt l'angle ABD (fig. 11.). Enfin il peut avoir ſon ſommet à la circonférence, & un de ſes côtés prolongé peut encore rencontrer la circonférence ; tel eſt l'angle ABD (fig. 12.). Examinons la meſure de ces angles dans les différents cas que nous venons d'énoncer.

Fig. 9. 1.° L'angle ABE a pour meſure la moitié de l'arc AE compris entre ſes côtés.

Car si l'on mene du sommet de l'angle & par le centre la ligne BCD, & que l'on tire le rayon CA, l'angle ACD comme *extérieur*, sera égal aux deux intérieurs opposés ABC & BAC. Mais BC étant égal à AC comme rayon du même cercle, le triangle BCA est isoscele; donc l'angle BAC = CBA; donc BAC + CBA = 2CBA; donc ACD = 2CBA, c'est-à-dire que l'angle CBA n'est que la moitié de l'angle ACD. Mais ce dernier ayant son sommet au centre, a pour mesure l'arc compris entre ses côtés AD; donc l'angle ABD qui n'en est que la moitié, n'aura pour mesure que la moitié de l'arc AD. L'on prouvera de même que la mesure de l'angle DBE est la moitié de l'arc DE; donc la somme des deux angles ABC & DBE, ou l'angle ABE, aura pour mesure la moitié de l'arc ADE compris entre ses côtés.

Donc un angle qui a son sommet à la circonférence, & dont les côtés s'appuient sur les extrêmités du diametre, est droit. Ainsi BED est un angle droit, puisqu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence, ou 90 dégrés.

Donc un angle BEK est plus petit qu'un droit, lorsqu'ayant son sommet à

la circonférence, il comprend entre ses côtés un angle moindre que la demi-circonférence. Enfin il est plus grand qu'un droit, tel que l'angle BEH, lorsqu'il comprend entre ses côtés plus de la demi-circonférence.

L'on est convenu d'appeller *angle obtus* celui qui est plus grand qu'un droit; & *angle aigu*, celui qui est plus petit qu'un droit.

Fig. 10. 2.° Voyons quelle est la mesure de l'angle ACD; pour cela menons la droite BD. Alors ABD = BCD + BDC, c'est-à-dire que si à l'angle BCD ou ACD l'on ajoute l'angle BDC, la somme donnera l'angle ABD; donc si de l'angle ABD l'on retranche BDC, le reste sera égal à l'angle ACD; donc la mesure de l'angle ACD sera égale à la mesure de l'angle ABD qui est la moitié de l'arc AD, moins la mesure de l'angle BDE qui est la moitié de l'arc DE; c'est-à-dire qu'un angle dans cette position aura pour mesure la moitié de la différence des arcs compris entre ses côtés.

Fig. 11. 3.° Pour déterminer la mesure de l'angle ABD, prolongeons les côtés AB & BD de l'angle ABD, & menons la ligne CD; l'angle ABD =

ACD + CDE ; donc la meſure de l'angle ABD ſera égale à la ſomme des meſures des deux autres angles, c'eſt-à-dire que la meſure de l'angle ABD ſera la moitié de l'arc AD plus la moitié de l'arc EC ; donc un angle dans cette poſition aura pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés plus la moitié de l'arc compris entre les côtés de ſon oppoſé au ſommet.

4.° Enfin l'angle ABD a pour meſure la moitié de l'arc BD plus la moitié de l'arc BC ; car ABD = BCD + BDC ; donc un angle dans cette poſition aura pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés plus la moitié de l'arc ſoutenu par le prolongement du côté qui coupe le cercle. FIG. 12.

Une ligne ABC dans cette poſition, s'appelle *ſécante*. D'après ces propoſitions, il ſera facile de conclure que lorſque pluſieurs angles auront leur ſommet à la circonférence, & que leurs côtés s'appuieront ſur le même arc, ils ſeront égaux, puiſque tous auront la même meſure.

DES SURFACES.

LA plus ſimple ſurface terminée par des lignes eſt un triangle. Ainſi en dé-

terminant les propriétés des triangles, nous en conclurons celles des surfaces composées ; parce qu'il sera facile d'appercevoir que tout espace terminé par des lignes droites peut se diviser en triangles. Mais avant d'entrer dans le détail des propriétés des surfaces, nous allons donner quelques définitions.

Fig. 13. Un *triangle rectangle* est celui dont l'un de ses angles est droit ; ainsi le triangle ABC est rectangle, parce que l'angle ABC est droit ; le côté AC opposé à l'angle droit est appellé *hypothénuse*.

Fig. 14. Un *rectangle* est un espace terminé par quatre côtés perpendiculaires l'un sur l'autre ; ACDE est un rectangle, parce que AE & CD sont perpendiculaires sur AC & DE.

Un rectangle dont les côtés sont égaux, s'appelle *quarré* ; ainsi ABFE est un quarré, parce que $AB = BF = EF = AE$, & que les angles sont chacun droits.

Fig. 15. Un *parallélogramme* est un espace terminé par quatre côtés paralleles deux à deux ; ainsi ACDB est un parallélogramme, parce que AC est parallele à BD, & que CD est parallele à AB.

L'on appelle *diagonale* une ligne menée, dans une figure, d'un angle à

ſon oppoſé : ainſi dans le parallélogramme ACDB, AD eſt la diagonale.

Un *rhombe* eſt un parallélogramme dont les quatre côtés ſont égaux chacun à chacun : ainſi ABCD eſt un rhombe, parce que AB = BC = CD = AD, & que les côtés ſont paralleles deux à deux. Fig. 16.

Principe.

Deux triangles ſont parfaitement égaux, 1.° Lorſqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. 2.° Lorſqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Fig. 17.

1.° Les deux triangles ABC & *abc* ſont parfaitement égaux lorſque l'angle ABC = *abc*, & que les côtés AB & BC ſont égaux à leurs correſpondants *ab* & *bc*.

Car, puiſque l'angle *abc* eſt égal à l'angle ABC, en poſant le ſommet *b* du premier ſur le ſommet B du ſecond, les côtés *ab* & *bc* tomberont ſur leurs homologues AB & BC. Mais ces côtés ſont égaux par l'hypotheſe, donc *ac* tombera ſur AC ; donc les deux triangles ne feront qu'un ſeul & même triangle ; donc enfin ils feront parfaitement égaux.

2.° Si AC = *ac*, & que les angles BAC

& BCA soient égaux à leurs homologues *bac* & *bca*, les deux triangles seront parfaitement égaux: car, en posant *ac* sur AC; comme l'on suppose les angles BAC & BCA égaux à leurs correspondants *bac* & *bca*, les côtés *ac* & *bc* tomberont sur leurs homologues AC & BC; donc le le point *b* tombera sur le point B; donc les deux triangles se confondront; donc enfin ils seront parfaitement égaux.

Enfin s'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun; en posant *ac* sur AC, le point *b* tombera sur B, puisque les lignes BA & AC sont supposées égales à leurs correspondantes *ba* & *ac*.

Fig. 15. Si dans un parallélogramme ACDB, l'on mene la diagonale BC, les deux triangles DAB & DAC seront parfaitement égaux; car l'angle CDA est égal à l'angle DAB comme alterne interne, l'angle CAD est égal à l'angle ADB par la même raison, & le côté AD est commun aux deux triangles; donc ils seront parfaitement égaux, puisqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc AC=BD, & AB=CD; donc les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux.

Ce que nous venons d'observer sur

les parallélogrammes, doit s'entendre aussi des rectangles, rhombes, & quarrés.

A l'égard du rhombe, la diagonale AC divise l'angle BAD en deux également; car AB est égal à BC par hypothese; donc le triangle ABC est isoscele; donc l'angle BAC égal à l'angle BCA. Mais BCA = DAC, comme alternes internes; donc BAC = DAC; donc la diagonale divise dans le rhombe les angles opposés en deux également.

Dans une figure, l'on appelle ***hauteur*** la perpendiculaire abaissée d'un angle sur le côté opposé; & le côté sur lequel tombe la perpendiculaire, se nomme *base*.

Pour avoir la surface d'un rectangle, il faudra multiplier la base par la hauteur, c'est-à-dire les deux côtés contigus l'un par l'autre. Ainsi la surface du rectangle ACDE sera égale à ED × AE; car imaginons que ED se meuve parallelement à lui-même le long de AE, il parcourra tous les points de cette ligne, & il se répétera autant de fois qu'il y a de points dans AE. Or le nombre de points contenu dans AE, est AE lui-même; donc en multipliant la base par la hauteur, l'on aura la surface du rectangle. Fig. 14.

De même si d'un angle A d'un parallé- Fig. 15.

logramme l'on abaiſſe la perpendiculaire AE, l'on aura ſa ſurface en multipliant BD par AE.

Pour le prouver, abaiſſons la perpendiculaire CF, & prolongeons BD juſqu'en F; alors CAEF ſera un rectangle dont la ſurface eſt égale à FE × AE. Or le rectangle AEFC eſt égal au parallélogramme ACDB; car le triangle AEB eſt parfaitement égal au triangle CFD, puiſque BA = CD, comme côtés oppoſés d'un parallélogramme AE = CF; par la même raiſon BD = AC = FE, & retranchant DE, l'on aura FD = BE.

Les deux triangles CFD & AEB étant parfaitement égaux, ſi on leur ajoute une même quantité ACDE, les ſommes ſeront égales; & l'on aura ACDB = AEFC. Mais l'on a la ſurface du rectangle, en multipliant FE ou AC ou BD par AE; donc celle du parallélogramme qui lui eſt égale, ſera auſſi exprimée par la même quantité BD × AE, (c. q. f. d.).

Fig. 18. Mais un triangle eſt toujours la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur; car par le ſommet A l'on peut imaginer une parallele AD à la baſe BC qui ſera terminée par la parallele que l'on menera du point C au

côté AB. Alors ADCB ſera un parallélogramme, puiſque les côtés ſont égaux deux à deux; donc AD = BC & CD = AB; & comme AC eſt commun, les deux triangles ABC & ADC ſeront parfaitement égaux; donc ABC eſt la moitié du parallélogramme. Mais l'on peut faire la même conſtruction, & conclure la même vérité ſur les autres triangles; donc généralement un triangle eſt la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur. Or la ſurface du parallélogramme ſe détermine en multipliant la baſe par la hauteur; donc celle du triangle qui en eſt la moitié, ſera égale à la moitié du produit de la baſe par la hauteur, ou à la baſe multipliée par la moitié de la hauteur.

L'on eſt convenu d'appeller *polygone* un eſpace terminé par plus de trois côtés. Ainſi ABCDE eſt un polygone. Comme ces eſpaces ſont terminés par des lignes droites, il eſt aiſé de s'appercevoir que l'on peut diviſer un polygone en triangles, en menant des diagonales. Mais nous venons d'enſeigner la méthode de déterminer la ſurface d'un triangle; l'on aura donc facilement celle d'un polygone. Il ſuffira pour cela de le diviſer en trian- FIG. 20.

gles, en menant les diagonales BC, BD, & en cherchant la ſurface des triangles qui compoſent le polygone.

FIG. 19. L'on eſt convenu auſſi d'appeller *trapeze* une figure ABFC, terminée par quatre côtés, & dont deux oppoſés AB & CF ſont paralleles.

Puiſque les droites AE & DF ſont paralleles, les perpendiculaires FE & DA ſeront égales. Cela poſé, en menant la diagonale AF, le trapeze ſe trouve diviſé en deux triangles dont la ſomme compoſe ſa ſurface ; celle du triangle ABF eſt égale à $\frac{AB \times EF}{2}$, la ſurface du triangle ACF eſt égale à $\frac{CF \times AD}{2}$; donc la ſomme $\frac{AB \times EF + CF \times AD}{2}$ ſera la ſurface du trapeze : mais $EF = AD$; ainſi l'expreſſion du trapeze peut ſe changer en celle-ci $\frac{AD \times (AB + CF)}{2}$; c'eſt-à-dire que pour avoir la ſurface du trapeze, il faudra multiplier la hauteur AD par la moitié de la ſomme $\frac{AB + CF}{2}$ des deux côtés paralleles.

PRINCIPE.

FIG. 22. SI dans un triangle AED l'on mene une droite BC parallele à la baſe ED, l'on aura AE : AB :: AD : AC.

Car en menant les diagonales EC & BD, les deux triangles BEC & BCD feront égaux, puifqu'étant compris entre mêmes paralleles, ils auront même hauteur, & que la bafe BC eft commune à l'un & à l'autre. Si à ces deux triangles égaux l'on ajoute le même triangle BAC, les fommes feront égales ; donc ECA = ABD ; mais il eft clair que deux quantités égales peuvent fe comparer à une même grandeur ; donc ECA : ABC :: ABD : ABC. Or les deux triangles ECA & BCA ayant même hauteur, font entr'eux comme leur bafe ; car AEC : ACB :: AE multiplié par la hauteur eft à AB multiplié par la même hauteur. Puifque ces produits expriment le double des triangles, & que les moitiés font entr'elles comme leur tout ; donc en divifant les deux termes du dernier rapport par la hauteur commune, l'on aura AEC : ACB :: AE : AB. Mais nous avons trouvé AEC : ABC :: ABD : ABC ; donc auffi ABD : ABC :: AE : AB. Maintenant les deux triangles ABD & ABC étant de même hauteur, feront entr'eux comme leur bafe ; donc ABD : ABC :: AD : AC ; & concluant du dernier de ces rapports au premier, l'on

aura AE : AB :: AD : AC (c. q. f. d.).

Si par le point C l'on mene CQ parallele à AE, alors BCEQ étant un parallélogramme, BE = CQ & EQ = BC. Cela posé, puisque QC est parallele à AE, l'on aura DC : AC :: DQ : QE; donc DC + AC : AC :: DQ + QE : QE. Mais DC + AC = AD; donc AD : AC :: DE : BC. Mais nous avons démontré que AD : AC :: AE : AB; donc le rapport de DE à BC sera égal à celui de AE à AB; donc AD : AC :: AE : AB :: DE : BC; c'est-à-dire que si dans un triangle l'on mene une droite parallele à la base, les deux triangles que cette droite formera, seront semblables.

DÉFINITION.

DEUX figures sont semblables lorsqu'elles ont leurs angles égaux, & leurs côtés homologues proportionnels.

L'on appelle *côtés homologues* dans deux figures, ceux qui sont opposés à des angles égaux.

PRINCIPE.

FIG. 22 & 23. DEUX triangles AED & *abc* sont semblables, 1.° Lorsqu'ils ont leurs angles égaux; 2.° Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels;

3.°

3.° Lorſqu'ils ont leurs trois côtés proportionnels.

Dans le ſecond cas, nous démontrerons que les deux autres angles du premier, ſont égaux à leurs correſpondants du ſecond ; alors les deux triangles ſeront ſemblables par le cas précédent.

Dans le troiſieme cas, nous démontrerons que les angles ſont égaux ; alors ils ſeront ſemblables.

PREMIER CAS.

L'ANGLE *bac* étant égal à l'angle BAD, l'on pourra poſer le ſommet *a* du premier ſur le ſommet A du ſecond, & les côtés *ab* & *ac* tomberont ſur leurs homologues AE & AD. Mais l'on ſuppoſe l'angle ABC ou *abc* égal à l'angle AED ; donc les lignes BC & ED ſont paralleles ; donc BA : AC : BC, ou *ba* : *ac* : *bc* :: AE : ED : AD ; donc les deux triangles ſeront ſemblables, puiſqu'ils ont leurs angles égaux & leurs côtés homologues proportionnels. FIG. 22 & 23.

SECOND CAS.

L'ANGLE *a* étant égal à l'angle A, les côtés *ab* & *ac* tomberont ſur leurs homologues AE & AD ; & comme l'on ſuppoſe les côtés qui comprennent les angles ;

proportionnels, c'eſt-à-dire AB : AC, ou *ab* : *ac* :: AE : AD ; la ſécante BC qui donne cette proportion, ſera parallele à la baſe : car en menant les lignes CE & BD, les triangles ACB & ACE étant de même hauteur, ſeront entr'eux comme leur baſe ; donc ACE : ACB :: AE : AB. Mais, par hypotheſe, AE : AB :: AD : AC ; & les triangles ABD & ABC étant de même hauteur, donnent AD : AC :: ABD : ABC. Concluant de ces deux rapports égaux, l'on aura ACE : ACB :: ABD : ACB ; mais ACB = ACB, donc ACE = ABD ; & retranchant de chaque membre le même triangle ABC, les reſtes ſeront égaux ; donc BCE = BCD. Mais ces deux triangles étant égaux & ayant même baſe, doivent néceſſairement être de même hauteur ; donc BC & ED ſeront paralleles, puiſque les perpendiculaires égales ſont renfermées entre mêmes paralleles. BC étant parallele à ED, les angles ſeront égaux ; donc les triangles ſeront ſemblables.

TROISIEME CAS.

PROLONGEONS les côtés *ab* & *ac* juſqu'à ce qu'ils ſoient égaux à leurs homologues AE & AD, & menons la droite *ed* ;

puisque, par hypothese, l'on a AE : AD :: *ab* : *ac*, l'on aura aussi, en substituant les quantités égales *ae* & *ad*, *ae* : *ad* :: *ab* : *ac* ; donc *bc* est parallele à *ed* ; donc les deux triangles *bac* & *ead* sont semblables. Si nous démontrons maintenant que le triangle *ead* est parfaitement égal au triangle EAD, nous en conclurons aussi que le triangle *bac* sera semblable au triangle EAD.

Nous avons déjà AE = *ae*, & AD = *ad*. Cela posé, les triangles *abc* & *ead* étant semblables donnent *ab* : *bc* :: *ad* : *ed*. Mais, par hypothese, *ab* : *bc* :: AE : ED ; donc *ae* : *ed* :: AE : ED. Mais *ae* = AE, donc *ed* = ED ; donc ces deux triangles seront parfaitement égaux, puisqu'ils ont leurs côtés égaux chacun à chacun ; donc enfin les triangles *bac* & EAD sont semblables.

Si nous supposons les deux polygones ABCDE & *abcde* semblables, il est clair qu'alors il y aura même nombre d'angles & même nombre de côtés ; & les deux polygones seront divisés en même nombre de triangles semblables. Fig. 20 & 21.

Car puisque les deux polygones sont semblables, l'angle ABC est égal à l'angle *abc* ; l'on aura aussi AB : BC :: *ab* : *bc* ;

donc les deux triangles ABC & *abc*, sont semblables; donc l'angle BCA = *bca*; mais à cause des deux polygones semblables, l'on a BCD = *bcd*; retranchant de ces deux quantités égales les angles égaux BCA & *bca*, les restes ACD & *acd* seront égaux. Cela posé, les deux triangles ABC & *abc* étant semblables, donnent AC : *ac* :: BC : *bc* ; mais à cause des deux polygones semblables, l'on a BC : *bc* :: CD : *cd*; & concluant, on aura AC : *ac* :: DC : *dc* ; donc les triangles ACD & *acd* sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. Et comme l'on formeroit le même raisonnement à l'égard des triangles qui composent le polygone, l'on conclura généralement que deux polygones semblables se divisent en même nombre de triangles semblables.

Fig. 22 & 23. Si des sommets A & *a* de deux triangles semblables l'on abaisse les deux perpendiculaires AR & *ar*, alors les triangles EAR & *bar* seront semblables, comme ayant des angles égaux chacun à chacun; ces triangles étant semblables, auront leurs côtés homologues proportionnels; donc EA : *ba* :: AR : *ar*. Mais

les triangles EAD & *bac* étant ſemblables, donnent EA : *ba* :: ED : *bc*. Multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $\overline{EA}^2 : \overline{ba}^2 :: AR \times ED : ar \times bc$. Diviſant par 2 chaque terme du ſecond rapport, l'on aura $\overline{EA}^2 : \overline{ba}^2 :: \frac{AR \times ED}{2} : \frac{ar \times bc}{2}$. Mais ces deux derniers produits expriment la ſurface des deux triangles; donc en général les ſurfaces des triangles ſemblables ſont proportionnelles au quarré de leurs côtés homologues.

Delà il eſt aiſé de conclure que les ſurfaces de deux polygones ſemblables ABCDE & *abcde*, ſont proportionnelles au quarré de leurs côtés homologues; c'eſt-à-dire que ABCDE : *abcde* :: $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; car les deux triangles ABC & *abc* étant ſemblables, ſont entr'eux comme $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; de même ACD : *acd* :: $\overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$. Mais AC : *ac* :: AB : *ab*. Multipliant cette proportion par elle-même, on trouvera $\overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$ :: Fig. 20 & 22.

$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$. Mais $\overline{AC}^2 : \overline{ac}^2 :: ACD : acd$; donc $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: ACD : acd$, c'eſt-à-dire que tous les triangles qui compoſent les ſurfaces de deux polygones ſemblables, ſeront proportionnels à $\overline{AB}^2$ & $\overline{ab}^2$; donc auſſi les ſurfaces de deux polygones ſemblables, ſeront entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; donc enfin les propriétés que nous trouverons ſur les triangles ſemblables ſeront les mêmes que celles des polygones.

Fig. 22. Si le triangle EAD eſt rectangle, & que l'on abaiſſe la perpendiculaire AR, les triangles EAR & RAD ſeront chacun ſemblables au triangle EAD, comme ayant les angles égaux; donc $EAR : EAD :: \overline{EA}^2 : \overline{ED}^2$. Mais $EAR : RAD :: \overline{ED}^2 : \overline{AD}^2$; donc $EAR : EAD : RAD :: \overline{EA}^2 : \overline{ED}^2 : \overline{AD}^2$. Mais $EAD = EAR + RAD$; donc $\overline{ED}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AD}^2$; donc le quarré conſtruit ſur *l'hypothénuſe*, eſt égal à la ſomme des quarrés conſtruits ſur les autres côtés des triangles rectangles; & comme les figures ſembla-

bles gardent le même rapport que le quarré des côtés homologues, ce que nous venons de conclure ſur les triangles nous le conclurons auſſi ſur les polygones; donc ſi trois polygones ſemblables forment par leurs côtés homologues un triangle rectangle, celui qui ſera conſtruit ſur l'hypothénuſe, ſera égal à la ſomme des deux autres.

DÉFINITION.

UNE ligne eſt moyenne géométrique entre deux lignes données, lorſque la premiere eſt à la ſeconde comme la ſeconde eſt à la troiſieme; c'eſt-à-dire, lorſque le rectangle des deux lignes données eſt égal au quarré de la moyenne géométrique.

PRINCIPE.

L'ON propoſe de déterminer une ligne moyenne géométrique entre les deux lignes données FM & FG. Sur la ligne FM, comme diametre, décrivez un demi-cercle FEM; portez FG de F en O; & du point O élevez ſur FM la perpendiculaire OE, qui rencontrera la demi-circonférence au point E; de ce point menez les deux cordes EF & FM, alors EF ſera la ligne demandée; car les deux FIG. 24.

triangles FEM & FEO, sont semblables, parce qu'ils sont tous deux rectangles, & que l'angle F leur est commun; donc ces triangles auront leurs côtés homologues proportionnels; donc FM opposé à l'angle droit dans le triangle FEM, & à FE opposé à l'angle droit dans le triangle FEO, comme le même FE opposé à l'angle M dans le triangle FEM est à FO opposé à son égal FEO; donc FE est la moyenne géométrique demandée. Donc si de l'extrêmité du diametre l'on mene une corde quelconque FE, & que du point E, où elle rencontre la circonférence, l'on abaisse la perpendiculaire FO, le quarré de la corde FE sera toujours égal au produit du diametre FM par la partie comprise entre l'extrêmité du diametre, & la perpendiculaire abaissée du point où la corde rencontre la circonférence; c'est-à-dire que l'on aura toujours $\overline{FE}^2 = FM \times FO$.

DÉFINITION.

Fig. 25. L'on appelle *tangente* toute ligne CD qui ne rencontre la circonférence qu'en un seul point.

Deux lignes CH & CF sont coupées

en *parties réciproques* aux points K & G, lorſque la premiere ligne CH eſt à la ſeconde CF comme la partie CG de cette ſeconde eſt à la partie correſpondante CK de la premiere ; c'eſt-à-dire qu'alors le rectangle fait ſur la premiere ligne CH & ſa partie CK, eſt égal au rectangle fait ſur la ſeconde ligne CF & ſa partie CG.

Principe.

Si du centre B l'on mene le rayon BD au point D où la tangente rencontre la circonférence, le rayon BD ſera perpendiculaire ſur la tangente ; car ſi du centre B l'on mene les droites BA, BE, &c. elles ſeront obligées de ſortir de la circonférence pour rencontrer la tangente ; donc ces droites ſeront toutes plus grandes que le rayon BD ; ainſi BD ſera la plus courte ligne que l'on peut mener du centre à la tangente : or la perpendiculaire d'un point à une ligne eſt le plus court chemin ; donc BD eſt perpendiculaire à la tangente.

D'après ce principe, rien ne ſeroit plus ſimple que de mener une tangente à un cercle d'un point donné pris ſur la circonférence. Pour cela il ſuffira de mener un rayon à ce point, & d'élever une per-

pendiculaire à l'extrêmité de ce rayon. Si le point d'où l'on veut mener la tangente étoit le point C, il faudroit mener de ce point au centre B du cercle la droite CB, & décrire sur CB comme diametre le demi-cercle BDC, la circonférence de ce demi-cercle rencontreroit la premiere au point D. Alors la ligne CD que l'on meneroit au point d'interfection, feroit tangente au cercle MKDH ; car l'angle BDC eft droit, puifqu'il a fon fommet à la circonférence, & qu'il eft appuyé fur les extrêmités du diametre ; donc BD eft perpendiculaire fur DC ; donc cette derniere ligne eft la tangente demandée.

Un angle MCD formé par deux tangentes, eft divifé en deux également par la ligne BC menée de fon fommet au centre du cercle ; car le triangle DBM étant ifofcele, les angles de la bafe feront égaux ; donc leurs compléments DMC & MDC font égaux ; donc MCD eft ifofcele ; donc enfin MC = MD. Ainfi le triangle BMC fera parfaitement égal au triangle BDC ; donc l'angle BCD = BCM ; c'eft-à-dire que la droite BC divife en deux également l'angle formé par les deux tangentes.

Si l'on mene les deux ſécantes CH & CF, & que des deux points K & G, où elle rencontre la circonférence, l'on mene les cordes KF & HG, les triangles FKC & HGC ſeront ſemblables ; car l'angle HCF eſt commun à l'un & à l'autre de ces triangles, & l'angle KFG eſt égal à l'angle KHG, comme ayant tous deux la même meſure. Ces deux triangles étant ſemblables ont leurs côtés homologues proportionnels ; donc HC oppoſé à l'angle HGC eſt à FC oppoſé à l'angle FKC qui lui eſt égal, comme CG oppoſé à l'angle CHG eſt à KC oppoſé à l'angle KFC qui lui eſt égal; donc les ſécantes ſont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures.

Maintenant ſi FC s'écarte continuellement de HC juſqu'à ce que cette ligne parvienne à la poſition CD de la tangente ; alors CG & CF deviendront égaux à CD. Ainſi dans la proportion CH : CF : : CG : CK, ſi l'on ſubſtitue à la place de CF & de CG la quantité CD qui leur eſt égale, lorſque cette ſécante devient tangente, l'on aura CH : CD :: CD : CK ; donc $\overline{CD}^2 = CH \times CK$. Et comme l'on démontreroit la même

propriété à l'égard des autres ſécantes, nous en conclurons généralement que le quarré de la tangente eſt égal au produit fait de la ſécante entiere par ſa partie extérieure.

En diviſant la circonférence en une infinité de parties égales, chaque partie pourra alors être priſe pour une ligne droite, & ſervira de baſe à un triangle dont le ſommet ſera au centre. Mais la ſurface de chacun de ces petits triangles ſera égale à la baſe multipliée par la moitié de la hauteur; & comme nous ſuppoſons les côtés infiniment près l'un de l'autre, la hauteur de chacun de ces triangles infiniment petits ſera le rayon du cercle; ainſi leur ſurface ſe trouvera en multipliant la petite baſe par la moitié du rayon. Et comme les hauteurs de tous les triangles, dans lequel le cercle ſera diviſé, ſont égales au rayon; pour avoir la ſurface du cercle, il ſuffira d'ajouter toutes les parties infiniment petites qui compoſent la circonférence, & multiplier cette ſomme par la moitié du rayon; donc la ſurface du cercle eſt égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon.

Juſqu'ici l'on n'a pu découvrir *géométriquement* une ligne droite égale à la cir-

conférence. Voilà ce qui rend la *quadrature du cercle*, ou sa surface, impossible rigoureusement. Mais l'on a trouvé que le diametre étoit contenu à peu de chose près dans la circonférence trois fois & un septieme de fois ; c'est-à-dire que le rapport du diametre à la circonférence est celui de 7 à 22. Par exemple, le diametre étant de 7 pieds, la circonférence en contiendra 22 à peu de chose près.

Ainsi quoiqu'à la rigueur l'on ne peut pas découvrir la *quadrature du cercle*, l'on aura sa surface à un dégré d'exactitude suffisant pour la pratique.

Veut-on savoir quelle est la circonférence dont le diametre est 15 pieds ? L'on établira cette proportion, 7 : 22 :: 15 : 47 P. 1 p. 8 l. ; c'est-à-dire, si un diametre de 7 P. est contenu trois fois & un septieme de fois dans une circonférence de 22 P., de quelle grandeur sera la circonférence dont le diametre est de 15 pieds ? Le calcul fait, l'on trouvera cette circonférence de 47 P. 1 p. 8 l. à peu de chose près. Si l'on vouloit maintenant avoir la surface de ce cercle, il faudroit multiplier 47 P. 1 p. 8 l. par le quart du diametre 15 P., qui donneroit alors la

moitié du rayon ; le produit sera la surface du cercle.

Des principes précédents il en résulte l'addition, la soustraction, la multiplication, & la division des figures semblables.

De l'Addition.

Fig. 26. Supposons que AB, AC, CD, DE, soient les côtés homologues de quatre figures semblables que l'on propose d'ajouter.

Prenez deux côtés homologues AB & AC ; disposez-les à angles droits, & menez l'hypothénuse BC. De l'extrémité C de cette hypothénuse, élevez une perpendiculaire CD égale au troisieme côté CD ; menez la nouvelle hypothénuse BD. Enfin du point D, élevez la perpendiculaire DE, que vous ferez égale à la quatrieme proportionnelle AE ; menez l'hypothénuse BE ; & la figure construite sur BE semblable à l'une des figures proposées, sera égale à la somme des polygones donnés.

Car $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$; ou en mettant pour $\overline{BC}^2$ sa valeur $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, l'on aura $\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 +$

$\overline{CD}^2$, mais $\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2$; ou en mettant pour $\overline{BD}^2$ ſa valeur $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$, l'on aura $\overline{BE}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2$. Or les quarrés des côtés homologues des figures ſemblables, ont les mêmes propriétés que ces figures; donc la figure ſemblable conſtruite ſur BE, ſera égale à la ſomme des figures propoſées.

De la Soustraction.

AB & AC ſont les côtés homologues de deux figures ſemblables dont on veut connoître la différence. Pour la découvrir, ſur le plus grand côté AB décrivez un demi-cercle; & de l'extrêmité A du diametre, & avec une ouverture de compas égale à AC, décrivez un arc de cercle C, qui coupera la demi-circonférence au point C; de ce point, & par l'autre extrêmité du diametre, menez la corde BC; & la figure ſemblable conſtruite ſur cette corde, ſera la différence des deux figures propoſées; car ACB étant un angle droit, l'on aura $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$; c'eſt-à-dire qu'à $\overline{CB}^2$ il faut ajouter $\overline{AC}^2$, pour Fig. 27.

que la ſomme ſoit égale à $\overline{AB}^2$; donc $\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$. Or les quarrés des côtés homologues des figures ſemblables, ont mêmes propriétés que ces figures ; donc la figure conſtruite ſur CB, ſemblable à l'une des figures propoſées, en exprimera la différence.

De la Multiplication.

Fig. 28. AN eſt le côté d'une figure que l'on veut rendre cinq fois plus grande. Pour y parvenir, menez une ligne indéfinie AB de l'extrêmité A ; portez cinq fois l'intervalle AN, de A en N, de N en H, de H en K, de K en L, & de L en B. Sur AB, comme diametre, décrivez le demi-cercle AMB ; du point N, élevez ſur AB la perpendiculaire MN ; menez la corde AM ; & la figure ſemblable, conſtruite ſur cette ligne, ſera cinq fois plus grande que la figure propoſée : car $\overline{AM}^2 = AB \times AN$. Or $AB = 5\,AN$ par conſtruction ; donc en ſubſtituant pour AB ſa valeur $5\,AN$, dans la premiere égalité, l'on aura $\overline{AM}^2 = 5\,AN \times AN$ ou $5\,\overline{AN}^2$? Or les figures ſemblables gardent le même rap-

port

port que le quarré de leurs côtés homologues ; donc la figure conſtruite ſur AM ſera cinq fois plus grande que celle qui ſera conſtruite ſur AN.

Cette méthode eſt générale, & nous allons l'appliquer ſur une fraction $\frac{n}{m}$, en mettant pour *m* & *n* telle valeur que l'on jugera à propos.

Suppoſons que l'on veuille multiplier la figure conſtruite ſur AB par $\frac{n}{m}$; menez la ligne AB égale aux côtés de la figure ; diviſez AB en *m* de parties égales ; prenez *n* de ces parties de B en N ; du point N, élevez la perpendiculaire MN ; menez la corde MB ; & la figure conſtruite ſur MB, ſemblable à la figure propoſée, ſera $\frac{n}{m}$ de cette figure ; car $\overline{MB}^2 = AB \times BN$. Or $BN = \frac{n}{m} AB$; donc en ſubſtituant la valeur de BN dans l'égalité, l'on aura $\overline{MB}^2 = \frac{n}{m} \overline{AB}^2$; mais les figures ſemblables gardent le même rapport, & ont les mêmes propriétés que les quarrés de leurs côtés homologues ; donc, &c.

De la Division.

Fig. 28. AB est le côté d'une figure que l'on veut diviser en cinq parties égales. Pour y parvenir, sur AB, comme diametre, décrivez un demi-cercle AMB; divisez AB en cinq parties égales; de l'extrêmité N d'une de ces parties, élevez la perpendiculaire MN, & menez la corde MA; alors la figure semblable construite sur MA, sera la cinquieme partie de la figure proposée; car $\overline{MA}^2 = AB \times AN$. Mais $AN = \frac{AB}{5}$; donc $\overline{MA}^2 = AB \times \frac{AB}{5} = \frac{\overline{AB}^2}{5}$, ou la cinquieme partie de $\overline{AB}^2$. Mais les quarrés ont les mêmes propriétés que les figures semblables; donc, &c.

Il est maintenant facile d'ajouter, soustraire, multiplier, & diviser les figures semblables : les principes que nous avons donnés avant ces regles, étoient uniquement destinés pour les résoudre.



USAGE
DE LA REGLE ET DU COMPAS,
Pour tracer des figures sur le papier.

POUR tracer les figures rectilignes sur le papier, il faut avoir une regle, un compas, & une équerre.

Les regles, ainsi que les équerres, se font ordinairement avec du bois de poirier bien sec.

L'*équerre* est un triangle rectangle ABC, dans le milieu duquel on pratique une ouverture M pour avoir plus d'aisance à se servir de cet instrument. FIG. 31.

Le *compas* est un instrument connu de tout le monde. Pour qu'il soit bien exécuté, il faut qu'en écartant les branches, & les rapprochant lentement & par un mouvement continu, l'on ne sente au tact aucun retour ni aucun défaut ; les deux pointes réunies doivent rester appliquées l'une contre l'autre.

Pour reconnoître si une regle AB est bien dressée, menez avec elle une ligne CD (fig. 30.) ; retournez la regle sans dessus dessous, & en approchez le bord contre la ligne que vous avez tracée :

ſi le bord de la regle convient ſur tous les points de la ligne, c'eſt une preuve qu'elle eſt bien dreſſée.

Définition.

Un *Problême* eſt une propoſition dans laquelle il s'agit de découvrir une vérité, & de démontrer enſuite qu'on l'a découverte.

PROBLÊME PREMIER.

L'on propoſe d'élever une perpendiculaire, 1.° Sur le milieu d'une ligne : 2.° De l'extrêmité de cette ligne : 3.° Enfin l'on propoſe de l'abaiſſer d'un point donné ſur une ligne donnée.

Solution.

Fig. 32. 1.° De l'extrêmité A de la ligne AB, & d'une ouverture de compas plus grande à vue d'œil que la moitié de cette ligne, décrivez un arc de cercle DHE. Du même point & avec la même ouverture de compas, décrivez de l'autre côté de la ligne, l'arc de cercle LKQ; du point B, autre extrêmité de la ligne, & avec la même ouverture de compas, décrivez deux autres arcs de cercle HF & K.

Ces nouveaux arcs rencontreront les premiers aux points H & K ; menez la ligne HK, elle ſera perpendiculaire ſur le milieu de AB.

Car par la conſtruction les diſtances KA & KB ſont égales, ainſi que HA & HB ; donc la ligne HK ne penche pas plus d'un côté que d'autre ſur AB ; donc elle eſt perpendiculaire ſur cette ligne. Mais tous les points de HK étant également éloignés des extrêmités A & B, l'on aura AN = NB ; donc HK eſt perpendiculaire ſur le milieu de AB.

2.° Pour élever la perpendiculaire de l'extrêmité B de la ligne AB, choiſiſſez un point E à volonté ; prenez avec le compas l'ouverture EB, & décrivez la circonférence MBC : du point C où cette courbe rencontre la ligne AB, menez par le centre E le diametre CEM qui rencontrera encore la circonférence au point M : de ce point, & par le point B, menez la ligne MB ; elle ſera perpendiculaire à l'extrêmité de AB ; car MC étant un diametre, MBC ſera un angle droit.

3.° Enfin pour abaiſſer la perpendiculaire du point D ſur la ligne AC, l'on Fig. 33.

prendra avec le compas un intervalle quelconque DB, & l'on décrira un arc de cercle qui rencontrera encore la ligne AC; au point C, des points B & C, comme centre & avec des ouvertures de compas égales, l'on fixera la position du point E; alors DE sera perpendiculaire sur le milieu de BC, & par conséquent perpendiculaire sur la ligne AC dont BC fait partie. Si l'arc BC ne rencontroit que le prolongement de AC, l'on prolongeroit cette ligne; & le point C étant fixé sur ce prolongement, l'on acheveroit comme ci-dessus.

PROBLÊME SECOND.

L'on propose, 1.° De faire sur une ligne BC *un angle égal à l'angle* BAC : 2.° *De mener une parallele d'un point donné à une ligne donnée :* 3.° *De diviser un angle en deux parties égales.*

Solution.

Fig. 34. 1.° Du point B, sommet de l'angle donné, & avec une ouverture quelconque BA, décrivez l'arc de cercle BC; & du point B, extrêmité de la ligne donnée, & avec la même ouverture BA,

décrivez l'arc de cercle CAD ; prenez l'intervalle BC ; & du point C, avec cette ouverture, décrivez l'arc de cercle A, qui rencontrera CAD au point A ; par ce point & le point B, menez la ligne BA ; alors l'angle ABC ſera égal à l'angle donné ABC, puiſque ces deux angles comprennent entre leurs côtés des arcs égaux, & qu'ils ont leur ſommet au centre de deux circonférences égales.

2.° Pour mener du point C une parallele CD à la ligne AB, menez la ligne BC ; du point C & ſur BC, faites une angle BCD égal à l'angle ABC ; alors CD ſera parallele à AB, puiſque les angles alternes internes ſont égaux. Fig. 35.

3.° Pour diviſer l'angle ABC en deux également, du ſommet B décrivez l'arc de cercle AC ; & des points A & C, comme centre & avec des ouvertures de compas égales, décrivez deux arcs de cercle, dont l'interſection fixera le point D ; alors BD diviſera l'angle ABC en deux également ; car tous les points de la ligne BD feront également éloignés de A & de C. Fig. 36.

Nous avons fait voir ce que c'étoit qu'une équerre : pour reconnoître ſi cet

inftrument eft exact, l'on s'y prendra de la maniere fuivante.

Fig. 37. Menez la ligne AD, & élevez avec beaucoup de précifion une perpendiculaire BC, fur le milieu de AD. Préfentez l'angle droit de l'équerre fur l'angle CBA, & voyez fi ces deux angles fe conviennent; ou bien tracez avec l'équerre la perpendiculaire BC fur DA; tournez l'équerre de l'autre côté, & reconnoiffez fi l'angle droit de l'équerre convient parfaitement fur l'angle CBD.

PROBLÊME TROISIEME.

L'on propofe, 1.° D'élever avec l'équerre une perpendiculaire à l'extrêmité d'une ligne donnée, ou fur la ligne même, ou bien de l'abaiffer d'un point pris au-deffus ou au-deffous de la ligne: 2.° De mener avec le même inftrument une ligne parallele d'un point donné à une ligne donnée.

Solution.

Fig. 38. Présentez l'hypothénufe de l'équerre contre la regle AG, & difpofez le côté CD de l'équerre fur la ligne donnée; ce qui doit s'exécuter en tenant toujours

l'hypothénuſe contre la regle. Alors tenant la regle d'une main, & faiſant gliſſer contre elle l'équerre, l'on s'arrêtera ou à l'extrêmité de la ligne, ou à un point fixé en-deſſus ou en-deſſous de la ligne; & dans la poſition que l'on demande, l'on menera, ſuivant l'autre côté BC ou DG, une ligne qui réſoudra la premiere partie du Problême.

A l'égard de la parallele, il faut appliquer l'un des côtés de l'équerre contre la regle, & faire convenir l'autre côté DC ſur la ligne DF. Alors tenant la regle fixe, l'on fera gliſſer l'équerre juſqu'au point donné, & l'on tracera, ſuivant le côté de l'équerre qui touche ce point, une ligne qui ſera parallele à la ligne donnée : l'on peut auſſi réſoudre la même queſtion en préſentant l'hypothénuſe de l'équerre contre la regle. Au reſte, un peu d'uſage de cet inſtrument, avec ce que nous venons de dire, ſuffira pour en faire comprendre la pratique. Fig. 39.



PROBLÊME QUATRIEME.

L'on propose, 1.° De faire passer une circirconférence par trois points donnés, pourvu que ces points ne soient pas en ligne droite : 2.° De déterminer le centre d'un cercle ou d'un arc.

SOLUTION.

FIG. 40. 1.° JOIGNEZ les points A, B & H par deux droites AB & BH; sur le milieu de ces lignes, élevez deux perpendiculaires EG & CD; elles se rencontreront au point D, qui sera le centre du cercle dont la circonférence passera par les trois points donnés. Car ces lignes étant chacune perpendiculaires sur le milieu des droites BH & AB, leur rencontre sera également éloignée des trois points A, B & H.

2.° Si l'arc ABH est donné, il faudra mener deux cordes quelconques AB & BH, & sur le milieu de chacune d'elles élever deux perpendiculaires dont l'intersection D sera le centre de l'arc ABH, & par conséquent le centre du cercle ABHG.

PROBLÊME CINQUIEME.

L'on propoſe, 1.° De déterminer une quatrieme proportionnelle à trois lignes données : 2.° Une troiſieme proportionnelle à deux lignes données : 3.° De diviſer une ligne donnée en un certain nombre de parties égales.

SOLUTION.

1.° FAITES un angle quelconque BAC; portez la premiere ligne donnée AB ſur le côté AX, de A en B ; & la ſeconde AC ſur le côté AY, de A en C : portez la troiſieme ligne AD, de A en D; menez la ligne BC; & par le point B, tirez une droite DE parallele à BC. Alors AE ſera la quatrieme proportionnelle demandée ; car DE étant parallele à BC, les deux triangles BAC & DAE ſeront ſemblables; donc AC:AB::AD:AE. FIG. 41.

2.° Pour déterminer la troiſieme proportionnelle aux deux lignes AB & AC, il faut, après avoir formé un angle BAC, porter les deux côtés de A en B, & de A en C. Alors portant une ſeconde fois AB ſur AC de A en D, l'on menera la droite BC, & par le point D une pa- FIG. 41 & 42.

rallele DE à BC, & l'on aura AC : AB : : AD : AE. Mais AB = AD par construction ; donc AC : AB : : AB : AE ; donc AE est troisieme proportionnelle aux deux lignes AC & AB.

Fig. 43. 3.° Enfin pour diviser la ligne donnée AP en sept parties, ou tout autre nombre de parties égales, formez un angle PAH, & portez AP de A en P ; prenez une ouverture de compas AB ; portez-la sept fois de A en H ; menez la ligne HP, & par les points B, C, D, E, F, G, menez des droites BI, CK, DL, EM, &c. paralleles à PH : ces lignes diviseront AP en sept parties égales. Car ces lignes étant paralleles, les côtés AP & AH seront divisés proportionnellement. Mais AH est divisé en sept parties égales ; donc AP sera dans le même cas.

PROBLÊME SIXIEME.

L'on propose de faire un triangle parfaitement égal au triangle ABC.

Solution.

Fig. 44. Menez une ligne *ac* que vous ferez égale à AC ; du point *a*, comme centre,

& d'une ouverture de compas égale à AC, décrivez l'arc de cercle *b* ; & du point *c*, comme centre, & d'une ouverture de compas égale à BC, décrivez un autre arc de cercle qui coupera le premier au point *b* ; par ce point & les extrêmités *a* & *c*, menez deux lignes *bc* & *ab*. Alors le triangle *abc* sera parfaitement égal au triangle ABC, puisqu'ils auront leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

PROBLÊME SEPTIEME.

Construire une figure semblable à une autre.

SOLUTION.

NOUS avons donné la méthode de déterminer le côté d'une figure égale, 1.° à la somme de plusieurs figures semblables ; 2.° à la différence de deux figures semblables ; 3.° multiple d'une figure donnée ; 4.° sous-multiple d'une figure donnée. Pour résoudre ces différentes propositions, nous avons enseigné la méthode de fixer le côté d'une nouvelle figure, qui, étant construite semblable à l'une des figures proposées, résoudroit les différents cas que nous venons d'énoncer. La maniere de construire une figure quel-

conque ſemblable à une autre ; ſera l'objet de ce Problême. Il ſuffit de ſe rappeller que deux triangles ſont ſemblables, lorſqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun, & que deux polygones ſemblables ſont diviſés en même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun.

Pour faire un triangle ſemblable au triangle ABC, menez un ligne droite *ac*; du point *c* & ſur *ac*, faites un angle *bca* égal à l'angle BCA ; du point *b*, & ſur *ac*, faites un angle *bac*, égal à l'angle BAC ; alors le triangle *bac* ſera ſemblable au triangle ABC.

FIG. 45. Pour conſtruire un polygone ſemblable au polygone ABCDFGHE, menez une ligne *hg*, & faites ſur cette droite les angles *ehg* & *egh*, égaux aux angles EHG & EGH ; le point *e* étant fixé, tracez plus fortement les lignes *eh* & *hg*, pour les diſtinguer de la diagonale.

Sur *eg* faites les angles *feg* & *fge*, égaux à leurs correſpondants FEG & FGE ; faites les angles *def* & *dfe*, égaux à leurs correſpondants DEF & DFE ; ſur *ad* conſtruiſez les angles *dab* & *bda*, égaux à leurs homologues DAB & BDA. Enfin ſur *bd*, faites les angles *bdc* & *cbd*, égaux à leurs homologues

BDC & CBD; alors la figure *abcdfhe* ſera ſemblable au polygone propoſé, puiſque ces deux figures ſeront diviſées en même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun, & ſemblablement diſpoſées.

Nous ne nous étendrons pas davantage ſur les conſtructions des figures, parce que les propoſitions que nous pourrions ajouter, ſeroient ou ſemblables aux précédentes, ou inutiles, par rapport à l'objet que nous avons en vue.

Remarque.

Lorsqu'un plan eſt fort compoſé, & que l'on veut en avoir une copie, il ſeroit aſſez difficile, & ſur-tout fort long, de diviſer les polygones, qui compoſeroient le plan propoſé, en triangles, & de faire des triangles ſemblables ſuivant ce que nous venons de dire. L'on peut abréger ces ſortes d'opérations; c'eſt-à-dire, ſe procurer une copie d'un plan ou d'un deſſein; 1.° en le piquant; 2.° en le calquant; 3.° en le deſſinant par le moyen de la vître ou du papier à la ſerpente; 4.° en le deſſinant au quarré.

1.° Pour piquer le plan ou le deſſein,

il faut le mettre sur le papier destiné à recevoir la copie, arrêter le plan & la feuille de papier par de petites épingles que l'on piquera aux quatres angles sur le milieu des bords ; ensuite si le plan est extrêmement composé, on le divisera par des lignes menées au crayon en rectangles, suivant la plus petite largeur ; & ces bandes rectangulaires seront plus ou moins étroites, suivant que le dessein sera plus ou moins composé. Alors l'on commencera par le sommet d'une de ces bandes ; l'on suivra de proche en proche avec le piquoir (qui n'est autre chose qu'une éguille fine fixée à un petit manche de bois) tous les points qui marquent les sinuosités des chemins, rivieres, &c., contenus dans la premiere bande ; l'on piquera aussi trois ou quatre points de la ligne qui termine la largeur de cette premiere bande ; & l'on continuera de même sur les suivantes.

Le plan étant piqué, on le détachera de la feuille destinée à recevoir la copie ; & après avoir reconnu & mené les lignes qui fixent les bandes qui sont dans le premier dessein, l'on reconnoîtra successivement, & de proche en proche, tous les points, en comparant & en ayant

toujours

toujours ſous les yeux le premier deſſein. Il eſt inutile d'obſerver que ces premieres lignes doivent être menées au crayon & fort légérement.

2.° Pour calquer le deſſein, l'on couvrira le revers du plan d'une couche légere de pouſſiere de ſanguine ou de pierre noire bien pulvériſée; cette couche doit ſe paſſer légérement, de crainte que le papier ſur lequel l'on veut tracer le deſſein, ſoit terni; alors l'on fixera le deſſein ſur une feuille de même grandeur, en plaçant de petites épingles comme ſi l'on vouloit le piquer; & par le moyen d'un calquoir, qui eſt une petite pointe émouſſée ronde, l'on ſuivra tous les contours; la pointe preſſant le plan, imprimera ſur la feuille de papier blanc, les ſinuoſités que l'on a ſuivies.

Lorſque le deſſein eſt précieux, & que l'on ne veut pas en ternir le revers, il faut paſſer la couche de ſanguine ou pierre noire, ſur une feuille de papier blanc, de la même grandeur que le deſſein propoſé. Alors l'on poſera cette feuille entre le deſſein & la feuille de papier deſtinée à recevoir la copie. A l'égard du calquoir, l'on apperçoit bien aiſément que ſi la pointe étoit affilée, elle couperoit le papier.

3.° Pour avoir la copie du deſſein par le moyen de la vitre, il faut poſer la feuille de papier blanc ſur le deſſein propoſé, arrêter ces deux feuilles avec de petites épingles, & appliquer le revers du deſſein contre une vitre expoſée au grand jour. Dans cette poſition, le deſſein ſe trouvera entre la vitre & la feuille de papier, & les contours paroîtront ſur la ſurface du papier blanc ; alors il ſera facile de ſuivre les ſinuoſités avec le crayon.

L'on peut faire la même opération, & avec bien plus d'aiſance, par le moyen d'une bougie; mais alors il faut être pourvu de la machine ſuivante. La vitre, plus ou moins grande, ſera fixée dans un quadre de bois que l'on poſera ſur une caiſſe ouverte à l'une des extrêmités, & haute d'un pied & demi ou deux pieds. L'on poſera cette caiſſe ſur une table baſſe, & l'on placera en dedans une lampe ou une bougie. Cela poſé, l'on fermera ſoigneuſement les fenêtres, pour intercepter, autant qu'il ſera poſſible, la communication du jour; alors l'on placera le deſſein fixé à la feuille de papier blanc ſur la vitre, & les traits paroîtront très-diſtinctement ſur la feuille de papier.

L'on peut encore rapporter un deſſein en ſe ſervant d'un papier huilé ou du papier à la ſerpente. L'on apprête le premier, en paſſant ſur du papier ordinaire une ou deux couches d'huile de noix ; le ſecond ſe vend chez les papetiers : l'opération eſt abſolument la même que celle de la vitre ; il eſt inutile d'inſiſter là-deſſus.

L'on peut encore rapporter un deſſein, en le ponçant ; cette méthode s'exécute ordinairement lorſque l'on veut rapporter un deſſein ſur une étoffe. Pour cela l'on pique, avec une aiguille un peu groſſe, les contours du deſſein ; les trous que l'on pratiquera ſur les contours, doivent être, autant que faire ſe peut, également éloignés les uns des autres. Le deſſein étant piqué, l'on prendra du charbon de fuſin que l'on pulvériſera ; l'on placera cette pouſſiere dans de la mouſſeline claire, & l'on en fera un petit paquet. Alors, plaçant le revers du deſſein ſur la ſurface qui doit le recevoir, l'on paſſera le petit ſachet qui renferme le charbon, ſur le deſſein, en donnant de petites ſecouſſes, pour qu'il puiſſe s'échapper à travers le tiſſu de la mouſſeline. Le deſſein, pendant cette opération,

doit être tenu fixe ; on le leve, & l'on trouve les contours deſſinés ſur la ſurface qui doit recevoir la copie. L'on ne peut ſe ſervir de cette méthode que ſur des deſſeins qui ne ſont pas précieux. Auſſi lorſque l'on veut poncer un deſſein que l'on veut conſerver, l'on commence par le deſſiner à la vître, & l'on pique les contours de la copie.

4.° Enfin l'on peut ſe procurer la copie d'un deſſein, en le deſſinant au quarré. Cette méthode conſiſte à diviſer le plan propoſé en bandes plus ou moins larges, ſuivant la longueur de la feuille. L'on diviſera de même la largeur de la feuille ; cette opération faite ſur le deſſein, toute ſa ſurface ſera couverte de quarrés plus ou moins grands, ſuivant les largeurs que l'on aura données aux bandes. Cela poſé, l'on diviſera le bord du papier ſur lequel l'on veut tracer le deſſein, en autant de parties égales qu'il y a de bandes ; & cela, tant dans la longueur que dans la largeur du papier. Alors la feuille de papier contiendra autant de quarrés que le deſſein ; l'on ſuivra les quarrés tracés ſur le papier blanc, & l'on tracera les contours du deſſein, en ſuivant leurs poſitions, par rapport aux

quarrés correſpondants qui les comprennent dans l'original : il faut avoir continuellement l'œil ſur le deſſein, pour comparer les traits que l'on forme ſur la copie.

Juſqu'à préſent nous n'avons rapporté les deſſeins qu'en les prenant de la même grandeur ; mais il ſeroit facile de réduire un deſſein donné dans un rapport donné. Par exemple, ſi l'on vouloit réduire le deſſein ABCD en un autre qui fut trois fois plus petit, il faudroit le diviſer en quarrés plus ou moins grands, ſuivant la complication des contours : alors l'on diviſeroit l'un de ces quarrés égaux par trois ; c'eſt-à-dire que l'on chercheroit, ſuivant la méthode que nous avons donnée, un quarré trois fois plus petit que le quarré *mnop*. Le côté de ce quarré étant déterminé, on le portera ſur le bord de la feuille de papier blanc, autant de fois qu'il y a de quarrés ſur DC, & l'on achevera les petits quarrés ; alors l'on ſuivra chaque petit quarré, & l'on tracera les contours du deſſein dans les petits quarrés correſpondants. FIG. 46.

Il en ſeroit de même ſi au lieu de réduire un deſſein, l'on vouloit le rendre trois fois, quatre fois, &c. plus grand.

Telle eſt la maniere de rapporter les deſſeins ou les plans. L'on peut encore par le moyen d'un inſtrument appellé *Quarré*, rapporter un payſage, ou tel point de vue que l'on voudra, & cela même ſans qu'il ſoit, pour ainſi dire, néceſſaire de ſavoir le deſſein. Avant d'entrer dans le détail des opérations, il faut être prévenu de la conſtruction de cet inſtrument.

Fig. 47. ABCD, eſt un quadre de bois dont les bords ſont diviſés en parties égales, chacune d'un pouce ou un pouce & demi. A ces dimenſions le quadre eſt percé de petits trous qui reçoivent des fils de ſoie noire, que l'on a ſoin de tendre & d'arrêter ſolidement; alors ces fils diviſent le quarré ABCD en petits quarrés, tel qu'on le voit dans la figure.

Le quarré ABCD eſt arrêté perpendiculairement ſur une table CDKH, percée dans le milieu de pluſieurs mortaiſes quarrées G, L, I, &c., de même dimenſion. Dans l'une de ces mortaiſes entre juſte un pivot LE, qui porte un petit cercle de bois ou de cuivre, percé au centre d'un petit trou; la palette LE peut ſe placer ſucceſſivement dans les mortaiſes que l'on a pratiquées vers le

milieu de la table CDKH ; en ſorte qu'on peut l'approcher du quadre ABCD, ou l'éloigner à volonté.

Telle eſt la conſtruction du *Quarré.* L'on pourroit rendre cet inſtrument plus commode : c'eſt ce que l'on verra par la conſtruction d'un inſtrument propre au même uſage, mais plus étendu, & dont l'invention eſt due à M. Vallet, ancien Lieutenant-Général de Police de la Ville de Grenoble. Le nom ſeul de l'Auteur de cet inſtrument, me diſpenſe d'en faire l'éloge.

MLHG eſt une caiſſe de trois à quatre pouces de hauteur. Dans le milieu du fond de cette caiſſe ſont collés & cloués deux morceaux de bois formant une couliſſe EF à queue d'hironde ; cette couliſſe reçoit un pied-droit NO d'un pied & demi ou deux pieds de hauteur, dont l'extrêmité O, taillée auſſi à queue d'hironde, entre dans la couliſſe EF ; en ſorte que ce pied-droit peut s'approcher & s'éloigner de l'extrêmité ML de la caiſſe. Le pied-droit NO eſt percé dans toute ſa longueur de petits trous placés à égale diſtance les uns des autres. Fig. 49.

Ce pied-droit porte une boîte quarrée de cuivre, à laquelle eſt ſoudé un autre

morceau P de cuivre percé dans le milieu d'un petit trou ; cette boîte peut gliſſer le long de NO, & l'on peut la fixer dans beaucoup de poſitions par le moyen des petits trous, & d'une cheville de fer.

A un pouce de l'extrêmité ML du fond de la caiſſe, s'éleve un quadre de bois ABLM, dans lequel eſt aſſujetti une vitre bien nette ; le quadre ABML peut ſe replier dans la caiſſe MLHG. Pour obtenir ce mouvement, le quadre ABLM entre par ſes deux extrêmités L & M, dans deux ouvertures rondes, pratiquées à deux morceaux de bois collés vers les extrêmités M & L, dans le fond de la caiſſe & à un pouce des bords LH & MG ; en ſorte que ABLM tourne autour de ML, & ſe couche dans la caiſſe MLHG. Pour fixer le quadre ABLM dans une poſition quelconque, l'on place deux autres morceaux de bois percés en gorge de poulie D & I, & dans leſquels entre un petit cylindre, auquel eſt fixé un quart-de-cercle IX ; cette piece étant placée dans la couliſſe ronde D, le quart-de-cercle C entre dans deux fentes C & K, pratiquées ſur la ſurface des bords AM & BL du quadre, & qui en traverſent l'épaiſſeur ; cette épaiſſeur eſt auſſi refen-

due un peu au-dessus de l'endroit où le quart-de-cercle traverse les côtés AM & BL ; alors par le moyen d'une petite cheville plate X, que l'on fait entrer dans l'épaisseur du quadre, & qui porte sur le quart-de-cercle, l'on est le maître d'arrêter le quadre AMLD dans une position quelconque.

La caisse LMHG est portée sur un pied *amortoisé* dans un cylindre de huit pouces de diametre, sur lequel l'instrument est posé. Ce cylindre, ainsi que la caisse, sont percés dans le milieu, d'un trou, dans lequel l'on fait entrer une vis, & l'on fixe l'instrument au pied par le moyen d'une écroue que l'on place en-dessous du cylindre qui fait partie du pied.

Au reste, comme nous aurons occasion de décrire le pied de quelques instruments, l'on saisira beaucoup mieux la construction de celui-ci après la lecture de l'ouvrage. Nous donnerons le nom de *Vitre* à cet instrument.

Usage du Quarré & de la Vitre.

Pour dessiner un paysage, ou tel autre objet, par le moyen du *quarré*, il faut diviser la feuille de papier qui doit recevoir la copie, en autant de quarrés que

l'inſtrument en contient : peu importe que ces quarrés ſoient de la même grandeur, pourvu qu'il y en ait le même nombre. Cela poſé, l'on placera l'inſtrument en face du payſage que l'on veut deſſiner ; & regardant par la viſiere du pied-droit, l'on obſervera quelle partie du payſage comprend tel ou tel quarré ; alors l'on tracera le même contour ſur le quarré correſpondant du papier.

Pour faire cette opération avec le plus de juſteſſe poſſible, il faudra remarquer dans quelle partie d'un quarré répond tel ou tel point du payſage. Par exemple, ſuppoſons qu'il y ait une tour dans le payſage propoſé ; alors en regardant par la viſiere, l'on appercevra la tour diviſée en quarrés ; ſon ſommet & ſon pied occuperont les trois quarts, ou telle autre partie de deux, ou trois, ou un plus grand nombre de quarrés. L'on eſtimera ſoigneuſement les diſtances de ces objets aux fils de ſoie qui forment les quarrés de l'inſtrument ; & l'on rapportera ces points ſur le papier, éloignés dans le même rapport des côtés des quarrés tracés ſur le papier. L'on ſuivra ainſi tous les contours & tous les objets qui compoſent le payſage propoſé.

A l'égard des payſages que l'on peut prendre par le moyen de la vitre, il faut préparer la glace, pour qu'elle puiſſe retenir l'empreinte du crayon; l'on choiſira à cet effet de la gomme arabique bien tranſparente, que l'on fera diſſoudre dans de l'eau ; l'on paſſera deux couches de cette eau gommée ſur la ſurface de la glace qui doit recevoir le deſſein : alors l'on diſpoſera la vitre parallelement à l'objet ; & regardant à travers la viſiere, l'on ſuivra le deſſein ſur la glace, en traçant les contours avec de la ſanguine ou de la pierre noire ; les traits reſteront empreints ſur la glace à meſure qu'on les tracera.

Le payſage, ou tel autre objet, étant deſſiné ſur la glace, on le rapportera ſur un papier blanc, en poſant ce papier ſur l'inſtrument, & en plaçant la vître au grand jour : l'on peut encore mouiller légérement une feuille de papier, & appuyant cette feuille contre le deſſein, les contours y reſteront tracés. Je préfere cependant la premiere méthode pour lever le payſage de deſſus la vitre, parce que pour peu que la feuille de papier ſoit trop humectée, & qu'on n'ait pas le ſoin de la preſſer doucement ſur la glace, les

traits ſe confondent au point de ne pas les reconnoître.

Cet inſtrument eſt, comme on le voit, bien ſupérieur au quarré; l'on peut deſſiner toutes ſortes d'objets ſans ſavoir même le deſſein, parce qu'il ne faut que ſuivre des traits qui paroiſſent ſur la glace; nous ne ſaurions trop le recommander pour lever les payſages & la perſpective.

Dans le quarré, l'on deſſine, en appréciant les diſtances par rapport aux côtés des quarrés tracés; mais dans la vitre, tous les contours ſe trouvent placés proportionnellement.

Après avoir donné ce qu'il y a de plus eſſentiel dans les propriétés des lignes & des ſurfaces, venons maintenant aux propriétés des ſolides.

DES SOLIDES.

Nous avons déjà dit qu'un ſolide avoit trois dimenſions; longueur, largeur, & profondeur. A cette définition générale, nous joindrons les ſuivantes.

Fig. 49. Un *parallélipipede*, eſt un ſolide ABDCEFG compoſé de ſix faces perpendiculaires l'une ſur l'autre.

Un *cube* (fig. 50.), eſt un parallélipi-

pede dont les six faces sont des quarrés; c'est-à-dire que la longueur est égale à la largeur & à la profondeur.

Un *prisme*, est un solide ABCDEF, dont les deux bases opposées ABC & FDE, sont des figures parfaitement égales. FIG. 53.

Nous appellerons *plan* une surface infiniment mince ; & quand nous imaginerons des plans traverser des solides, il faudra se former l'idée d'une surface qui partageroit le solide suivant ce qu'exige la question. Ainsi quand nous nous servirons de cette expression : *Suivant telle & telle ligne du solide, soit fait passer un plan;* l'on s'imaginera le solide refendu suivant les lignes par lesquelles passe le plan.

Cela posé, si l'on imagine le triangle FED se mouvoir parallelement à lui-même le long de BF, il est clair qu'en passant par tous les points de BF, il aura laissé une trace que représentera le solide ABCDEF que l'on a appellé *prisme*.

Le prisme est triangulaire, lorsque sa base est un triangle ; il est quadrangulaire, lorsque la base est un polygone de quatre côtés ; en un mot le prisme prend son nom du polygone qui lui sert de base.

Le prisme peut être droit ou oblique. Si le plan s'est mu suivant une perpendiculaire AF à ce plan ; alors le prisme est droit, c'est-à-dire que ses faces ne pencheront pas plus d'un côté que d'autre sur la base : au contraire si le plan s'est mu suivant une ligne oblique à la base, alors le prisme est oblique ; mais la hauteur du prisme sera toujours une perpendiculaire abaissée du plan supérieur sur le plan inférieur.

Fig. 52. Une *pyramide* est un solide environné de triangles qui se terminent à un seul point. Ainsi BADC est une pyramide ; B en est le sommet ; ADC la base ; & la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base, s'appelle *hauteur.*

Un *cylindre* est un prisme dont la base est un cercle. La solidité d'un prisme droit est égal à sa base multipliée par sa hauteur : car en imaginant le plan générateur se mouvoir parallelement à lui-même le long de la hauteur du prisme, l'on conçoit qu'il s'est répété autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur : donc en répétant la base autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur, ou, ce qui revient au même, en multipliant

la base par la hauteur, l'on aura la solidité du prisme.

Il peut se présenter ici une difficulté à l'égard des prismes obliques, parce qu'il semble, au premier coup d'œil, que le plan générateur s'étant mu suivant une oblique, l'on doit multiplier ce plan ou la base par la longueur oblique du prisme. Mais un moment de réflexion sur la formation du prisme oblique, levera cette difficulté apparente.

Au reste nous prouverons géométriquement, lorsque nous parlerons des prismes obliques, qu'il seroit faux de multiplier la base par l'arête pour en avoir la solidité; mais auparavant nous donnerons une preuve métaphysique de cette proposition. Supposons à côté du prisme oblique un prisme droit qui ait la même base, & dont la hauteur soit telle que les deux prismes se trouvent entre deux plans paralleles. Il est clair que si l'on coupe le prisme oblique par un plan parallele à sa base, la section sera égale à la base, puisqu'elle représentera cette base arrivée au point de section lorsqu'elle s'est mue parallelement à elle-même pour engendrer le prisme. Il est donc clair que cette section sera égale à la base,

si à pareille hauteur l'on imagine que le prisme droit est coupé par un plan parallele à la base; la section sera égale à la base, puisqu'elle représentera cette base arrivée au point de section, lorsqu'elle s'est mue parallelement à la même pour engendrer le prisme droit; mais les deux sections prises à égale hauteur dans le prisme droit & dans le prisme oblique, étant égales à la même base, seront égales entr'elles : donc les plans qui composeront le prisme droit, seront égaux à leurs correspondants dans le prisme oblique; mais ces deux prismes étant renfermés entre deux paralleles, il doit y en avoir le même nombre dans l'un comme dans l'autre : donc le prisme oblique sera égal au prisme droit : donc l'on aura la somme des lames qui composent le prisme oblique, de la même maniere que l'on a celle du prisme droit. Mais la somme de ces dernieres est égale à la base multipliée par la perpendiculaire menée du sommet sur le plan de la base : donc l'on aura la solidité du prisme oblique de la même maniere : donc en général un prisme droit ou oblique, sera égal au produit de sa base par sa hauteur.

Fig. 53. Un prisme triangulaire est toujours

composé

composé de trois pyramides triangulaires de même base & de même hauteur que lui : car, suivant les faces AE & CF du prisme, imaginez un plan qui sépare la pyramide ABCD (fig. 54.), il restera alors la pyramide BACDE (fig. 55.), dont le sommet sera le point B; & la base le parallélogramme ACDE : menez la diagonale CE; alors le parallélogramme sera divisé en deux triangles égaux. Ainsi, si l'on fait passer un plan suivant les lignes BC & BE, l'on séparera encore les deux pyramides égales BACE & BCDE ; je dis égales, puisqu'elles ont même base & même hauteur, & que leur solidité, comme on le verra dans un instant, provient de la combinaison de ces dimensions. Mais en posant la pyramide BCAE sur le triangle BAC, son sommet sera le point E, & la base le triangle BAC; or cette pyramide sera toujours égale à la précédente, puisqu'en lui donnant cette position, l'on n'altere pas sa solidité. Mais en la considérant suivant cette nouvelle hypothese, la pyramide EABC (fig. 55.) sera égale à la pyramide ABDC (fig. 54.), puisque les bases & les hauteurs sont égales : car ABC (fig. 55.) = BDC (fig. 54.) =

FED (fig. 53.) : donc le prisme sera composé de trois pyramides égales, dont les bases & les hauteurs sont égales à celles du prisme. Or l'on détermine la solidité de ce dernier corps, en multipliant la base par la hauteur; donc l'on aura la solidité d'une pyramide triangulaire, en multipliant la base par le tiers de la hauteur.

Un prisme quelconque peut toujours se diviser en prismes triangulaires; car les bases opposées étant égales & paralleles, si l'on divise le polygone de la base en triangles, l'on pourra imaginer des plans qui, passant par ces lignes, diviseront le prisme, en prismes triangulaires. Ainsi ce que nous venons de conclure sur ces derniers, nous le conclurons aussi sur les premiers : donc en général la solidité d'une pyramide se déterminera en multipliant la base par le tiers de la hauteur.

Comme tous les corps terminés par des surfaces rectilignes planes, peuvent se diviser en prismes triangulaires, les trois propositions que nous allons donner mettront en état de déterminer la solidité des corps irréguliers. Nous ne saurions trop recommander au Lecteur de prêter une attention exacte à ces propositions.

Delà dépend abſolument le toiſé des remblais & déblais, dont nous traiterons dans le Chapitre du Nivellement.

Un priſme triangulaire peut avoir, 1.° Une hauteur comme dans la figure (56) : 2.° Il peut avoir deux hauteurs comme dans la figure (57) : 3.° Il peut avoir trois hauteurs comme dans la figure (58).

Dans ces différents cas, la ſolidité du priſme ſera égale au produit de ſa baſe par le tiers de la ſomme des hauteurs.

Lorſque le priſme n'a qu'une hauteur DC, alors c'eſt une pyramide, & l'on aura ſa ſolidité en multipliant la baſe ABC par le tiers de la hauteur DC. Fig. 56.

Suppoſons maintenant que le priſme CBAID a deux hauteurs AI & BD. Dans notre hypotheſe, la face ABDE eſt perpendiculaire ſur la baſe triangulaire IDC, & il faut prouver que la ſolidité de ce priſme eſt égale à ſa baſe IDC multipliée par $\frac{AI \times BD}{3}$. Pour cela imaginons la droite AD, & que l'on refende le priſme par un plan ADC; alors les deux pyramides CABD & CAID, feront toutes les deux de même hauteur; mais CM étant perpendiculaire ſur le plan ABDI, ſera la hauteur Fig. 57.

des deux pyramides, qui ont leur sommet au point C, & leur base sur le plan ABDI; donc la pyramide CBDA sera égale à $\frac{BAD \times CM}{3}$; donc aussi la pyramide CAID sera égale à AID $\times \frac{CM}{3}$; mais le triangle BAD = BD $\times \frac{ID}{2}$, parce que ID est perpendiculaire sur AI & BD, & que les deux triangles AID & BAD ont même hauteur, puisqu'ils sont renfermés entre mêmes paralleles BD & AI; donc aussi AID = AI $\times \frac{ID}{2}$: donc en substituant ces quantités égales dans les valeurs des pyramides que l'on a trouvées précédemment, l'on aura CBDA = $\frac{ID}{2} \times BD \times \frac{CM}{3}$, & CAID = $\frac{ID}{2} \times AI \times \frac{CM}{3}$. Mais les deux pyramides CBDA & CAID composent la solidité du prisme; donc ABCDI = $\frac{ID}{2} \times BD \times \frac{CM}{3} + \frac{ID}{2} \times AI \times \frac{CM}{3}$. Mais en considérant ce produit, l'on appercevra que la somme des lignes BD + AI, est multipliée par le facteur commun $\frac{ID}{2} \times \frac{CM}{3}$; donc en renfermant les deux quantités inégales entre

deux parenthefes, & fe contentant d'indiquer l'opération, l'on aura $ABCDI = \frac{ID}{2} \times \frac{CM}{3} \times (BD + AI)$. Mais en prenant le tiers du multiplicande, & triplant le multiplicateur, le produit eft toujours le même; donc $ABCDI = \frac{ID}{2} \times CM \times \frac{(BD + AI)}{3}$. Mais $\frac{ID}{2} \times CM$, exprime la furface du triangle IDC, & $\frac{BD + AI}{3}$ indique le tiers de la fomme des deux hauteurs AI & BD; donc lorfque le prifme a deux hauteurs, l'on aura fa folidité en multipliant la bafe par le tiers de la fomme des deux hauteurs.

Enfin fi le prifme a trois hauteurs, l'on peut imaginer un plan EDC qui le partage en deux pyramides ECDAB & EFCD. Cela pofé, comme EF eft parallele aux lignes BC & AD, il eft clair qu'en imaginant un nouveau plan ABF, les deux pyramides EABCD & FABCD feront égales, puifqu'elles auront même bafe & même hauteur. Mais une pyramide telle que FABCD, vient d'être trouvée égale à $DC \times \frac{GF}{2} \times \frac{(BC + AD)}{3}$; donc fon égale EABCD FIG. 58.

sera exprimée par le même produit.

La pyramide EFDC est aussi égale à $DC \times \frac{GF}{2} \times \frac{EF}{3}$. Or les deux pyramides EFCD & ECBAD, composent le prisme EBADCF; donc en ajoutant les quantités égales aux pyramides, l'on aura la solidité du prisme $EBADCF = DC \times \frac{GF}{2} \times \frac{EF}{3} + DC \times \frac{GF}{2} \times \frac{(AD + BC)}{3}$.

Mais $DC \times \frac{GF}{2}$ est facteur commun aux deux autres quantités inégales qui composent ce produit: renfermant les quantités inégales entre deux parenthèses, & se contentant d'indiquer la multiplication, l'on aura $EBADCF = DC \times \frac{GF}{2} \times \frac{(EF + AD + BC)}{3}$; c'est-à-dire que le prisme sera égal à sa base triangulaire multipliée par le tiers de la somme des trois hauteurs.

Remarque.

Fig. 59. Si dans un prisme droit ABCFED, l'on imagine une section quelconque DEG, alors l'on aura retranché du prisme droit la pyramide GDEF qui est égale, ainsi que nous venons de voir,

à DEF $\times \frac{GF}{3}$. Or $GF = CF - CG$; donc DEF $\times \frac{CF - CG}{3}$, sera aussi la solidité de la même pyramide. Cela posé, en disposant le prisme tronqué sur le plan DGE, alors l'on aura un prisme tronqué oblique; & si l'on pose DEFG sur ABC, alors AHB sera parallele au triangle DGE, & l'on aura réellement un prisme oblique ABHGED qui sera égal au prisme droit ABCFED, puisque l'on ajoute au-dessus de ce solide la pyramide qu'on a retranchée dans le bas. Mais pour avoir la solidité du prisme oblique, il faut ajouter la solidité de la pyramide DGFE ou ABCH, à la solidité du prisme tronqué ABCGED; mais ce prisme tronqué a trois hauteurs CG, BE & AD, dont les deux BE & AD sont égales à CF; donc ABCGED = ABC, ou DEF $\times \frac{(2CF + CG)}{3}$. Ajoutant ce résultat à la solidité de la pyramide ABCH que nous avons trouvé égale à DEF $\times \frac{(CF - CG)}{3}$, l'on aura la solidité du prisme oblique égale à DFE $\times \frac{(CF - CG)}{3}$ + DEF $\times \frac{(2CF + CG)}{3}$; ou

bien en multipliant le facteur commun DEF par la somme des facteurs inégaux, on aura la solidité du prisme oblique égale à $DEF \times \frac{(CF - CG + 2CF + CG)}{3}$; mais, moins CG & plus CG se détruisent, parce que c'est une même quantité ajoutée & retranchée d'une autre ; donc la solidité du prisme oblique sera égale à $DEF \times \frac{3CF}{3} = DEF \times CF$, ou par AD. Mais le plan EDF est perpendiculaire sur la face ABED ; donc pour avoir la solidité du prisme oblique, il faut multiplier une section perpendiculaire au prisme, par la longueur. Mais dans les triangles rectangles GFE & DFG, les hypothénuses EG & DG sont plus grandes que celles EF & DF ; donc la base DGE du prisme oblique, est plus grande que la base perpendiculaire DEF ; donc enfin il seroit faux de multiplier la base d'un prisme oblique par sa longueur AD, pour avoir sa solidité.

DU TOISÉ.

Le Toifé eft l'art d'évaluer *en mefures reçues*, les lignes, les furfaces, & les folides.

Pour évaluer les lignes, il s'agit de les mefurer, fuivant leur longueur, avec la *mefure reçue* dans le pays où l'on opere. Cette partie fera traitée dans le premier Chapitre de nos Éléments de la Géométrie Pratique.

A l'égard des furfaces, l'on fe fert de la toife quarrée, pour les évaluer. Cette mefure eft un quarré qui a une toife de longueur & une toife de largeur. La toife quarrée fe divife en fix parties égales, que l'on appelle *Toife-pied*, & dont le figne eft Tp. Pour fe convaincre que la toife-pied eft la fixieme partie de la toife quarrée, l'on n'a qu'à s'imaginer fix rectangles égaux, chacun d'une toife de longueur fur une toife de largeur, placés les uns à côté des autres; alors on aura un rectangle qui aura une toife de largeur fur fix pieds de longueur, qui eft une toife quarrée. L'on concevra de même que la toife-pied peut fe divifer en douze parties égales, chacune d'une

toise de longueur sur un pouce de largeur ; cette derniere mesure s'appelle *Toise-pouce*, & se marque par ce signe Tp. La toise-pouce se divise encore en douze parties égales, que l'on appelle encore *Toise-ligne*, & dont le signe est Tl., &c.

Puisqu'une toise-pied contient un pied de largeur sur six pieds de longueur, elle sera composée de six mesures égales, qui auront chacune un pied de longueur & un pied de largeur, & que l'on nomme *Pied quarré*. Mais une toise quarrée contient six toises-pieds ; donc une toise quarrée contiendra six fois six pieds quarrés, ou trente-six pieds quarrés. Telles sont les divisions ordinaires des mesures que l'on emploie pour évaluer les surfaces.

Pour déterminer la solidité des corps, l'on se sert ordinairement *de la toise cube & de ses parties*. Cette mesure est un cube parfait, qui a une toise de longueur, une toise de largeur & une toise de hauteur ; le signe qui la distingue est TTT.

La toise cube se divise en six parallélipipedes égaux, que l'on appelle *Toise-toise-pied*, & dont le signe est TTP. Pour se convaincre que cette subdivision est exacte, supposons la hauteur de la toise

cube divifée en fix parties égales, dont chacune de fes parties fera d'un pied. Imaginons maintenant fix plans qui, paffant par les points de divifion, partagent la toife cube en fix parties ; elles feront égales, puifque chacune d'elles aura un pied de hauteur fur une toife quarrée de bafe ; donc la toife cube eft compofée de fix toifes-toifes-pieds. Mais une toife quarrée contient trente-fix pieds quarrés ; donc une toife-toife-pied aura trente-fix pieds quarrés de bafe fur un pied de hauteur ; donc *cette mefure* fera compofée de trente-fix petits cubes égaux qui auront chacun un pied quarré de bafe fur un pied de hauteur. Mais on appelle *Pied cube* un folide de cette dimenfion ; donc la toife-toife-pied contient trente-fix pieds cubes.

Cela pofé, une toife cube contient fix toifes-toifes-pieds : mais la toife-toife-pied eft compofée de trente-fix pieds cubes ; donc la toife cube contiendra fix fois trente-fix pieds cubes, ou deux cents feize pieds cubes.

L'on divife la toife-toife-pied en douze parties égales, que l'on appelle *Toife-toife-pouce.* Cette derniere mefure fe divife encore en douze parties égales ;

que l'on appelle *Toise-toise-ligne*, &c. Il sera de même facile de se convaincre de ces subdivisions, en faisant passer des plans par les points de division de la hauteur de ces différents parallélipipedes, comme nous l'avons indiqué à la toise cube.

Il est encore une autre espece de mesure que l'on nomme *Solive*; mais c'est une subdivision de la toise cube. Une solive contient trois pieds cubes; l'on s'en sert ordinairement pour évaluer la solidité des bois: dans quelques endroits, on les achete à la solive, & dans d'autres au pied cube. Mais il sera facile de réduire en pieds cubes, lorsqu'on sera en état de calculer les solides; puisque, après avoir déterminé le nombre de solives contenues dans une piece de bois, il suffira de multiplier le résultat par trois, pour avoir la solidité de la piece de bois en pieds cubes.

La solive contenant trois pieds cubes, sera un parallélipipede d'un pied quarré de base sur trois pieds de hauteur; ce qui n'a besoin d'aucune explication. Comme il seroit difficile de subdiviser la solive; en la regardant sous ce dernier point de vue, on la considere comme

un parallélipipede qui auroit ſoixante-douze pouces quarrés de baſe ſur une toiſe de hauteur ; & en effet l'on eſt le maître de lui donner ces dimenſions : car ſi l'on imagine un plan qui partage la ſolive, ſuivant ſa hauteur de trois pieds, en deux parallélipipedes égaux ; chacun d'eux aura un demi-pied quarré de baſe ſur trois pieds de hauteur. Si l'on poſe ces deux ſolides l'un ſur l'autre, l'on en formera un troiſieme qui aura un demi-pied quarré de baſe ſur une toiſe de hauteur. Mais un pied quarré ayant douze pouces de longueur ſur autant de largeur, contient douze fois douze pouces quarrés, ou cent quarante-quatre pouces quarrés ; donc enfin une ſolive eſt compoſée de ſoixante-douze parallélipipedes qui auront chacun un pouce quarré de baſe ſur une toiſe de hauteur ; & comme un parallélipipede de cette eſpece eſt appellé *toiſe-pouce-pouce*, nous en conclurons que la ſolive contient ſoixante-douze toiſes-pouces-pouces.

La toiſe cube, ainſi que nous l'avons obſervé, contient deux cents ſeize pieds cubes, mais la ſolive n'en contient que trois qui eſt la ſoixante-douzieme partie de deux cents ſeize ; donc une ſolive eſt

la soixante-douzieme partie d'une toise cube.

La solive se divise en six parties égales que l'on appelle *pied de solive*. Un pied de solive a soixante-douze pouces quarrés de base sur un pied de hauteur. Chaque pied de solive se divise en douze parallélipipedes égaux, que l'on appelle *Pouce de solive*, & qui ont soixante-douze pouces quarrés de base, sur un pouce de hauteur. Telles sont les subdivisions des principales mesures que l'on considere dans le Toisé.

Nous avons déjà démontré, que pour avoir la surface d'un parallélogramme il falloit multiplier la base par la hauteur; mais nous n'avons fixé aucune dimension dans la mesure dont nous nous sommes servi pour évaluer ces surfaces : rien n'a fixé nos idées. Nous nous sommes imaginé seulement un nombre prodigieux de lignes qui couvroient les surfaces que nous voulions évaluer. C'est pour fixer les idées sur une mesure reçue, que les peuples sont convenus de donner à leur mesure principale telle ou telle longueur.

En mesurant le nombre de toises que contient la base d'un parallélogramme, de même que celui que contient la hauteur,

le produit de ces deux quantités donnera le nombre de toises quarrées contenues dans sa surface.

Par exemple, pour déterminer la surface du rectangle ATKL, il faudra mesurer le nombre de toises que contient la base LK, de même que celui de la hauteur AL. Supposons que la base LK contienne six toises, & la hauteur, quatre; le produit 24 de la multiplication de 6 par 4, exprimera le nombre de toises quarrées contenues dans la surface du rectangle. En effet, par les points de division RS & I de la hauteur, imaginons des droites paralleles à la base; elles diviseront le rectangle en autant de petits rectangles qu'il y a de toises contenues dans la hauteur. Mais chacun de ces petits rectangles ILK ayant six toises de base sur une toise de hauteur, sera composé d'autant de toises quarrées *conm* qu'il y a de toises linéaires dans la base; donc en répétant ce nombre de toises quarrées par le nombre de rectangles qui composent la surface du grand, c'est-à-dire en multipliant le nombre de toises de la base par celui de la hauteur, le produit donnera le nombre de toises quarrées contenues dans la surface. FIG. 60.

L'on auroit de même la ſurface du parallélogramme AELS, en multipliant le nombre de toiſes contenues dans la baſe, par le nombre de toiſes contenues dans la hauteur. En effet, ſi par les points de diviſion F, G, H, I, K de la baſe, l'on imagine les paralleles FT, GV, &c., ainſi que les paralleles RL, SK, &c. de la hauteur; alors le parallélogramme ſera diviſé en autant de petits parallélogrammes égaux qu'il y a de toiſes quarrées contenues dans ſa ſurface; & ces petits parallélogrammes *it*FG ſeront égaux chacun à une toiſe quarrée. Pour s'en convaincre, l'on obſervera que le rectangle AELR eſt égal au parallélogramme AELS; donc le nombre de toiſes quarrées contenues dans le rectangle eſt égal au nombre de toiſes quarrées, ou au nombre de petits parallélogrammes d'une toiſe quarrée contenus dans le parallélogramme. Prouvons maintenant que chaque parallélogramme *it*GF eſt égal au quarré correſpondant *rk*FG. Premierement ces deux eſpaces ſont de même hauteur. Mais $GF = it$, & $GF = rk$; donc $rk = it$; donc le parallélogramme & le quarré ſont égaux; donc enfin la ſurface du parallélogramme AELS ſera égale

égale au nombre de toiſes contenues dans la baſe multipliée par le nombre de toiſes contenues dans la hauteur.

Comme l'on détermine la ſurface des triangles, en multipliant la baſe par la moitié de la hauteur; l'on aura la ſurface d'un triangle en toiſes quarrées, en multipliant le nombre de toiſes contenues dans la baſe par la moitié du nombre de toiſes contenues dans la hauteur: & comme toutes les figures planes & rectilignes peuvent ſe diviſer en triangles, l'on évaluera donc avec facilité la ſurface d'un eſpace quelconque.

Si la baſe du triangle ne contenoit pas un nombre exact de toiſes, l'on chercheroit le nombre de toiſes, pieds, pouces & lignes qu'elle contient; & l'on multiplieroit cette meſure par la moitié du nombre de toiſes, pieds, pouces de la hauteur: la multiplication s'exécutera, en diviſant les ſous-eſpeces en parties aliquotes de la toiſe, qui eſt ici la meſure principale. Le produit de cette multiplication donnera des toiſes quarrées, toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c.

EXEMPLE.

Suppofons la longueur de...	34 T.	3 P.	9 p.
Et la moitié de la hauteur de...	19 ...	4 ...	8.
	306		
	349 ...	3.	
	2 ...	2 ...	3.
	11 ...	3 ...	3.
	11 ...	3 ...	3.
	3 ...	5 ...	1.
	684 TT.	4 TP.	10 Tp.

Après avoir multiplié 34 par 19, l'on multipliera 19 toifes par 3 pieds; c'eft-à-dire que l'on prendra la moitié de 19 toifes. Comme 3 pieds valent 36 pouces, & que 9 pouces font le quart de ce produit, l'on devra prendre le quart de 9 toifes quarrées & 3 toifes-pieds: enfin l'on fuivra la méthode génerale que nous avons donnée dans la multiplication, en rapportant les parties aliquotes à la mefure principale, qui eft ici la toife. Il eft inutile d'infifter davantage là-deffus; nous ne pourrions donner que des exemples que l'on pourroit exécuter foi-même.

Au reſte, ce que nous venons de donner, & ce que nous dirons dans nos Eléments de Géométrie Pratique, ſur l'évaluation des ſurfaces, levera toutes les difficultés que l'on pourroit avoir.

Pour déterminer donc les ſurfaces en meſures quarrées, il ſuffit de les diviſer en triangles ou en rectangles; d'évaluer leur baſe & leur hauteur en toiſes: & le produit de la multiplication donnera le nombre de toiſes quarrées que contient la ſurface. Paſſons maintenant aux moyens de déterminer la ſolidité des corps.

Nous avons déjà démontré que la ſolidité d'un parallélipipede & d'un priſme, ſe déterminoit en multipliant la ſurface de la baſe par la hauteur; & celle d'un priſme *tronqué*, en multipliant la baſe triangulaire par le tiers de la ſomme des hauteurs. Ces principes bien entendus, rien n'eſt plus ſimple que d'en faire l'application. Veut-on avoir la ſolidité d'un parallélipipede en toiſes cubes? Il ſuffit de multiplier le nombre de toiſes quarrées que contient la baſe, par le nombre de toiſes linéaires ou de longueur que contient la hauteur; le produit de cette multiplication donnera le nombre de

toises cubes contenues dans le parallélipipede : ce qui eſt facile à prouver.

Car imaginons que le parallélipipede ait 49 toiſes quarrées de baſe, ſur 7 toiſes de hauteur. Si par les points de diviſion qui diſtinguent les toiſes dans la hauteur, l'on imagine des plans paralleles au plan de la baſe qui contient 49 toiſes quarrées; il eſt clair que le parallélipipede ſera diviſé en autant de parallélipipedes égaux qu'il y a de toiſes dans la hauteur, & chacun d'eux aura 49 toiſes quarrées de baſe, ſur une toiſe de hauteur ; c'eſt-à-dire qu'un de ces parallélipipedes ſera compoſé de 49 cubes, qui auront chacun une toiſe quarrée de baſe, ſur une toiſe linéaire de hauteur: donc le parallélipipede total ſera compoſé de ſept parallélipipedes qui contiendront chacun autant de toiſes cubes qu'il y a de toiſes quarrées dans la baſe. Mais ſi l'on répete l'un de ces parallélipipedes autant de fois qu'il y a de toiſes linéaires dans la hauteur, l'on aura la ſolidité totale : donc en multipliant le nombre de toiſes quarrées contenues dans la baſe, par le nombre de toiſes linéaires que contient la hauteur, le produit donnera le nombre de toiſes cubes contenues dans la ſolidité du corps:

donc auſſi l'on aura le nombre de meſures cubiques contenues dans une pyramide, en multipliant les toiſes quarrées que contient la baſe, par le tiers du nombre de toiſes linéaires contenues dans la hauteur.

APPLICATION des principes précédents au toiſé des corps que l'on rencontre le plus ordinairement.

LE toiſé du mur d'un puits ſe trouve en ajoutant les circonférences concentrique & excentrique B & Y. L'on prend la moitié de cette ſomme, que l'on multiplie par la hauteur du puits, priſe depuis le deſſus du *rouet*, c'eſt-à-dire de la charpente ſur laquelle eſt poſée la maçonnerie, juſqu'à la *mardelle* qui eſt les pierres de taille qui couronnent le mur. FIG. 62.

Si l'on propoſoit de déterminer le nombre de meſures cubiques que contient un tonneau, il faudroit chercher la ſurface du plus grand cercle, & celle de l'un des fonds ; la moitié de leur ſomme, multipliée par la longueur du vuide du tonneau, donnera le nombre de meſures cubiques que contient ce *vaſe*. Comme chaque pays ſe ſert d'une meſure particuliere pour les vins,

nous ne pouvons entrer dans aucun détail. Cependant la pinte de Paris peut ſervir de comparaiſon ; l'on ſait ordinairement combien une meſure principale de vin, dans tel ou tel pays, contient de pintes, meſure de Paris. Alors l'on réduira la ſurface des deux cercles en pouces quarrés, & l'on multipliera la moitié de leur ſomme par la longueur du vuide du tonneau, meſuré en pouces; le produit donnera le nombre de pouces cubes que contient le vuide : l'on diviſera ce produit par 48, qui eſt le nombre de pouces cubes que contient la pinte de Paris ; & le quotient donnera le nombre de pintes contenues dans le vaſe. Enfin, diviſant ce quotient par le nombre de pintes que contient la meſure principale du pays dans lequel l'on opere, le quotient donnera ce nombre de meſures.

Il eſt eſſentiel de prendre avec la derniere préciſion le diametre des deux cercles. Pour cela l'on fera entrer une baguette dans l'ouverture qui ſe trouve au milieu du tonneau, & par laquelle l'on introduit le vin dans ce vaſe ; la baguette étant poſée dans l'intérieur du tonneau à peu près dans une poſition perpendiculaire, l'on marquera ſur cette

baguette le point qui indique la hauteur du tonneau, prise dans ce sens, en y comprenant l'épaisseur du bois : l'on cherchera ensuite cette épaisseur, que l'on retranchera de la hauteur totale ; & le reste sera le diametre du plus grand cercle, sans y comprendre l'épaisseur des bois. Passons maintenant à d'autres objets.

Imaginons que la figure BDEGKA soit une pente, dont la partie la plus basse est la ligne BA, & proposons-nous de déterminer la solidité des terres terminées par le plan horizontal qui passeroit par BA & par la pente BDEGKA. Nous supposons premierement que cette pente est uniforme. FIG. 64.

On levera à la planchette le plan de l'espace BDEGKA ; ce qui donnera, non pas le plan de la pente, mais celui de cet espace rapporté au plan horizontal BCFILA qui passe par BA.

L'on déterminera ensuite, par le moyen du nivellement, les hauteurs verticales CD, FE, &c.; c'est-à-dire, la hauteur des points D, E, G, K, au-dessus du plan horizontal qui passe par BA.

L'on notera ces hauteurs séparément, & on les désignera par quelque signe qui

puiſſe faire rappeller qu'une telle hauteur, priſe dans le tableau, appartient à tel ou tel point du plan géométrique.

Alors l'on diviſera le plan géométrique par les diagonales AC, AF & AI; & l'on écrira les hauteurs des points D, E, G, K aux extrêmités de ces diagonales.

L'on cherchera la ſurface du premier triangle AIL, que l'on multipliera par le tiers de la ſomme des deux hauteurs IG & KL; l'on cherchera la ſurface du triangle IFA, que l'on multipliera par le tiers de la ſomme des deux hauteurs IG & FE; & ainſi de ſuite. La ſomme de ces différents produits donnera la ſolidité des terres que l'on demandoit.

Nous avons ſuppoſé, dans la réſolution précédente, que la pente étoit uniforme; ce cas arrive rarement, il eſt difficile de le rencontrer. Nous allons nous arrêter encore quelques inſtants ſur cette queſtion, pour prévenir les difficultés que l'on pourroit avoir.

Fig. 65. ABCD, &c., eſt un eſpace compoſé de pluſieurs pentes DEFGI, DOABC & AOKL, &c. L'on propoſe de déterminer la ſolidité des terres compriſes ſur le plan horizontal qui paſſe par AL. On levera à la planchette le plan de

l'espace proposé ; & l'on déterminera sur ce plan les lignes DI, OA, &c., qui séparent les différentes pentes.

Cela posé, l'on divisera la premiere pente, en trois, quatre, &c. parties égales, suivant son étendue ; l'on plantera des piquets aux points qui désignent les changements de pente.

L'on marquera ces différents points sur le plan, & l'on nivellera chaque partie ; c'est-à-dire que l'on cherchera de combien les points *n*, *h*, *i*, *k*, &c. sont plus élevés ou plus bas que les points *a* & *b* du plan : l'on marquera ces différentes hauteurs dans un tableau préparé à cet effet ; l'on rapportera toujours ces différentes mesures au plan géométrique.

L'on fera la même opération dans les seconde & troisieme parties de l'espace.

Cela posé, il est clair que l'on connoîtra la surface du plan EFGHI, &c. ainsi que les hauteurs *ng*, K*l*, ST, *m*X, &c. Ainsi si l'on divise la base de ce polygone en triangles, & que l'on imagine des plans, le solide sera divisé en prismes tronqués triangulaires. Or, comme nous l'avons démontré, la solidité du prisme triangulaire *mp*TSX, dont les trois hauteurs inégales sont *p*Y, TS & *m*X, est égale à la

ſurface de ſa baſe triangulaire multipliée par le tiers de la ſomme des trois hauteurs; donc, en ſuivant le même procédé, il ſera facile de déterminer le ſolide des terres dans cette premiere partie. L'on opérera de même à l'égard des ſuivantes.

Enfin, après avoir levé à la planchette le plan d'un eſpace quelconque, & après avoir nivelé cet eſpace par rapport aux points les plus bas, l'on diviſera le plan en autant de triangles que la configuration de l'eſpace le permettra; & l'on opérera comme ci-deſſus. Au reſte, comme les configurations ſe multiplient à l'infini, nous ne pouvons donner là-deſſus que des méthodes générales. Mais nous eſpérons que l'on ne trouvera aucune difficulté, après la lecture de notre Traité de la Planchette & du Nivellement.

L'on peut appliquer également la même méthode au Toiſé des ouvrages qui compoſent la fortification.

Fig. 67. En effet, ſoit *kacdebk* le profil du parapet & de la banquette d'un ouvrage de fortification dont on veut avoir la ſolidité. Pour fixer davantage les idées, imaginons-nous qu'il s'agit de déterminer la ſolidité des terres que renferment le parapet & la banquette d'une face de

baſtion dont ACLI (fig. 66.) exprime le plan. CL eſt la coupe, ſuivant l'angle de l'épaule; & AI, ſuivant l'angle flanqué : le profil *kadb* eſt pris perpendiculairement ſur la face; BK eſt la ligne du profil.

Cela poſé, par le point *e*, l'on menera une parallele *ep* à *mn*. Alors le ſolide *d*SRN*m* ſera diviſé en deux priſmes; l'un triangulaire *d*S*q*R*ep*, & l'autre rectangulaire *pq*RN*m*; ces deux priſmes ſeront tronqués, en prenant leur baſe ſur le profil *demn*, parce que le plan qui paſſera par l'angle de l'épaule ne ſera pas parallele à ce profil que nous ſuppoſons être pris perpendiculairement à la face. Or la ſolidité du priſme triangulaire ſe déterminera en multipliant le profil par le tiers de la ſomme des trois arrêtes *d*S, *pq* & *e*R. A l'égard du priſme rectangulaire, l'on aura ſa ſolidité, en multipliant le rectangle *pemc'* par une ligne *xy* meſurée ſuivant le milieu de l'épaiſſeur du parapet; ce qui eſt facile à prouver.

Pour cela imaginons un priſme oblique terminé par deux plans perpendiculaires AH & FN. Il faut prouver que ce ſolide eſt égal à AKHC × BE. Fig. 68.

Car imaginons que la baſe de ce

prisme soit KO ; sa solidité dans ce cas sera KHON × AK, ou CH qui lui est égal, puisque nous supposons les plans AF & OK paralleles; mais KHOM = $\frac{OH + KN}{2}$ × KH. Or, $\frac{OH + KN}{2}$ = LM = BE; donc la solidité du prisme sera AK × KH × BE. Or, AK × KH égal le rectangle ACHK. Substituant cette valeur dans le produit AK × KH × BE qui exprime la solidité du prisme, elle sera aussi représentée par ACHK × BE. Donc l'on a la solidité d'un prisme de cette espece, en multipliant le profil perpendiculaire ACHK par sa longueur prise dans le milieu de la face supérieure. Il sera facile de déterminer, par les méthodes que nous avons données, la solidité du prisme, dont le profil est *emb* (fig. 67); ainsi des autres.

A l'égard du toisé de la banquette, l'on multipliera son profil *acnk* par sa longueur prise au milieu.

Le revêtement de la fortification se mesure à la toise cube ; & pour y parvenir, l'on commencera par déterminer le nombre de toises cubes contenues dans les fondations; ce que l'on trouvera en multipliant le profil KG par la lon-

gueur priſe dans le milieu : l'on écrira à part ce réſultat.

L'on déterminera enſuite le nombre de toiſes cubes contenues dans les deux plans perpendiculaires NL & *b*G, en multipliant le profil *bg*L*c* par la longueur priſe ſur le milieu de *bc*. Enfin l'on déterminera la ſolidité du talut dont le triangle rectangle *bgh* eſt le profil, en multipliant ce triangle par le tiers de la ſomme des trois arrêtes *b*A', *h*K & *g*G. La ſomme de ces trois réſultats donnera la ſolidité du revêtement du rempart, dont le profil eſt le trapeze *cbh*L.

Le toiſé des glacis & des autres parties de la fortification étant fondé ſur les mêmes principes, nous croyons qu'il eſt inutile d'inſiſter davantage là-deſſus. Comme l'on a toujours les coupes & le plan des ouvrages qui compoſent la fortification que l'on veut toiſer, il ſuffira de diviſer les ſolides que l'on aura à meſurer, en priſmes triangulaires ayant trois hauteurs, ou en priſmes quadrangulaires renfermés entre deux plans paralleles.

Le toiſé des terres du foſſé ſe détermine ordinairement de cette maniere. L'on recherche la ſuperficie du fond,

que l'on multiplie par une profondeur moyenne à plusieurs profondeurs différentes. A ce solide l'on ajoutera celui qui est formé par les triangles rectangles qui fixent les profils du côté de l'escarpe & du côté de la contrescarpe.

Remarque.

Comme l'épaisseur des ouvrages est ordinairement la même dans un front de fortification, il est facile d'abréger les opérations du Toisé.

Par exemple, l'on multipliera le profil *pemc'* par la ligne mesurée sur le milieu de *pe* depuis l'angle flanqué jusqu'au milieu de la courtine ; l'on multipliera de même le profil *emb* par le tiers de la somme des trois lignes mesurées depuis l'angle flanqué jusqu'au milieu de la courtine ; & en suivant le même procédé à l'égard des autres parties, l'on aura la solidité du demi-front, que l'on doublera pour avoir celle du front entier. Enfin, si la fortification est réguliere, & que la fortification sur chaque front soit absolument la même par-tout, l'on multipliera le solide des parties qui composent l'un des fronts, par le nombre des profils dont est composée l'enceinte.

Avant de terminer le Toifé, nous donnerons la méthode de déterminer les furfaces des murs ordinaires ; ces fortes d'ouvrages fe paient ordinairement à la toife quarrée. Suppofons (fig. 63.) que EFMT repréfente un mur dont on veut avoir la furface, la coupe EC eft oblique. Pour parvenir à cette opération, l'on mefurera exactement la largeur EF prife extérieurement, & la largeur BC prife intérieurement ; l'on multipliera la moitié de la fomme de ces deux lignes, par la hauteur FM ; ce qui donnera la furface de la partie EFM. Ainfi pour toifer le mur de face d'un bâtiment, il faudra prendre la longueur extérieurement, & l'ajouter à la longueur prife intérieurement. La moitié de cette fomme fera multipliée par la hauteur du bâtiment.

Paffons maintenant au Toifé des bois à la Solive.

Du Toifé des bois à la Solive.

Nous avons déjà fait voir ce que c'étoit qu'une folive, de même que fes fubdivifions ; le toifé en eft fimple. Il peut arriver deux cas dans le toifé des bois à la Solive : ou la piece de bois eft équarrie, ou bien elle eft ronde. Dans le premier

cas, l'on peut déterminer le nombre de solives qu'elle contient, en mesurant la largeur & l'épaisseur de la tête équarrie en pouces; le produit de ces deux dimensions donnera des pouces quarrés que l'on multipliera par la longueur de la piece mesurée en toises; ce second produit donnera des toises-pouces-pouces. Mais nous avons observé qu'une solive contenoit 72 toises-pouces-pouces; donc en divisant le produit de la derniere opération par 72, le quotient donnera le nombre de solives contenues dans la piece de bois.

EXEMPLE.

Soit la largeur de..	o T.	o P.	14 p.
L'épaisseur de ...	o ..	o ..	15.
Et la longueur de..	4 ..	3 ..	6.

Le produit de la largeur par l'épaisseur donnera 210 pouces quarrés, qui multiplié par la longueur 4 T. 3 P. 6 p. donnera 362 toises-pouces-pouces & 3 pieds-pouces-pouces. Mais une solive contient 72 toises-pouces-pouces; cherchons donc combien de fois 72 est contenu dans 362. Le quotient, 5 solives, o pieds de solive & 2 pouces de solive, à peu de chose près, indiquera le nombre de

de ſolives contenues dans la piece de bois dont les dimenſions ſont données dans l'énoncé.

L'on peut encore déduire facilement une autre méthode de toiſer les pieces de bois à la ſolive, de cette propriété qu'une ſolive eſt la ſoixante-douzieme partie de la toiſe cube. Pour cela meſurez, comme précédemment, la largeur & l'épaiſſeur en pouces, & la longueur en toiſes; conſidérez l'une des dimenſions, la largeur ou l'épaiſſeur, comme des toiſes, & multipliez ce nombre de pouces conſidérés en toiſes, par les pouces de l'autre dimenſion. Cette multiplication doit ſe faire en parties aliquotes de l'eſpece la plus haute. Le produit donnera des toiſes quarrées, & partie de la toiſe quarrée, que l'on multipliera par les toiſes, pieds, pouces, &c. de la longueur; ce dernier réſultat ſera compoſé de toiſes cubes, & partie de la toiſe cube. Mais nous avons conſidéré l'une des dimenſions comme des toiſes, tandis que réellement elle n'étoit compoſée que de pouces; donc cette dimenſion a été conſidérée ſoixante-douze fois plus grande qu'elle ne l'eſt effectivement; donc le dernier produit compoſé de toiſes cubes, & qui provient de cette hypotheſe,

fera soixante-douze fois plus grand qu'il ne devroit l'être. Pour le rendre à sa juste valeur, il suffit de le rendre soixante-douze fois plus petit; mais c'est précisément ce que l'on fera si l'on considere le dernier produit composé de toises cubes, comme des solives & partie de solive, puisqu'une solive est la soixante-douzieme partie de la toise cube : donc l'on aura réellement le nombre de solives contenues dans une piece de bois équarrie, en se servant de cette méthode.

Il arrive souvent que l'on ait à toiser à la solive des pieces de bois rond; cette opération s'exécute dans la pratique, de la maniere suivante. Si la grosseur de la piece de bois est uniforme, & va en diminuant jusqu'au bout, l'on en prend la longueur ; l'on divise par deux cette dimension ; à ce milieu l'on fait une entaille pour découvrir le bois, & l'on prend cette circonférence moyenne en pouces ; l'on cherche le diametre du cercle moyen: & regardant le rayon, ou la circonférence, mesuré en pouces comme des toises, l'on déterminera la surface du cercle moyen, qui sera soixante-douze fois plus grand ; l'on multipliera ce produit par la longueur de la piece, & le

résultat exprimera le nombre de solives qu'elle contient.

Si la piece de bois n'est pas de grosseur uniforme, l'on fera l'opération par parties; c'est-à-dire que l'on divisera la piece en autant de parties qu'il sera nécessaire, pour que chacune d'elles soit à peu près également maintenue : alors cherchant séparément le nombre de solives contenues dans chaque partie, la somme indiquera le nombre total de solives contenues dans la piece de bois dont la grosseur n'est pas uniforme.

Je joins ici une Table qui accélérera prodigieusement le travail, puisqu'il suffira de faire une multiplication, pour avoir le nombre de solives contenues dans une piece de bois. J'ai poussé le calcul jusqu'aux pieces dont la circonférence moyenne seroit de cent trente pouces; rarement l'on en trouvera qui excéderont cette dimension : voici l'usage de la Table. L'on divisera la longueur de la piece en deux également; & prenant la circonférence moyenne en pouces, l'on cherchera dans la colonne des *circonférences moyennes*, le nombre que l'on vient de mesurer; à côté de ce nombre, l'on trouvera la surface du cercle moyen,

considéré soixante-douze fois plus grand; multipliant cette quantité de la Table par la longueur de la piece, le produit donnera le nombre de solives demandées.

EXEMPLE.

SUPPOSONS que la circonférence moyenne soit de 114 pouces 6 lignes, la surface du cercle, ainsi que le désigne la Table, sera de 14 TT. 2 TP. 11 Tp. 3 Tl. 4 T′. Supposons maintenant que la longueur soit de 8 toises; en multipliant 14 TT. 2 TP. 11 Tp. 3 Tl. 4 T′, par 8, le produit 115 S. 5 Ps. 6 ps. 2 ls. 8 ps., sera le nombre de solives contenues dans la piece. Il en est de même des autres.



TABLE

POUR réduire les pieces de Bois rond en solives.

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
2 . 0	0 . 0 . 0 . 3 . 9
2 . 6	0 . 0 . 0 . 5 . 10
3 . 0	0 . 0 . 0 . 8 . 7
3 . 6	0 . 0 . 0 . 11 . 8
4 . 0	0 . 0 . 1 . 3 . 3
4 . 6	0 . 0 . 1 . 7 . 3
5 . 0	0 . 0 . 1 . 11 . 10
5 . 6	0 . 0 . 2 . 4 . 10
6 . 0	0 . 0 . 2 . 10 . 4
6 . 6	0 . 0 . 3 . 4 . 3
7 . 0	0 . 0 . 3 . 10 . 9
7 . 6	0 . 0 . 4 . 5 . 7

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
8 . 0	0 . 0 . 5 . 1 . 1
8 . 6	0 . 0 . 5 . 8 . 10
9 . 0	0 . 0 . 6 . 5 . 2
9 . 6	0 . 0 . 7 . 2 . 1
10 . 0	0 . 0 . 7 . 11 . 6
10 . 6	0 . 0 . 8 . 9 . 3
11 . 0	0 . 0 . 9 . 7 . 6
11 . 6	0 . 0 . 10 . 5 . 11
12 . 0	0 . 0 . 11 . 5 . 3
12 . 6	0 . 1 . 0 . 5 . 1
13 . 0	0 . 1 . 1 . 5 . 1
13 . 6	0 . 1 . 2 . 5 . 9
14 . 0	0 . 1 . 3 . 6 . 11
14 . 6	0 . 1 . 4 . 8 . 7
15 . 0	0 . 1 . 5 . 10 . 7

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, consideré soixante - douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
15 . 6	0 . 1 . 7 . 1 . 2
16 . 0	0 . 1 . 8 . 4 . 4
16 . 6	0 . 1 . 9 . 8 . 4
17 . 0	0 . 1 . 10 . 11 . 2
17 . 6	0 . 2 . 0 . 4 . 0
18 . 0	0 . 2 . 1 . 9 . 0
18 . 6	0 . 2 . 3 . 2 . 5
19 . 0	0 . 2 . 4 . 8 . 4
19 . 6	0 . 2 . 6 . 2 . 9
20 . 0	0 . 2 . 7 . 9 . 8
20 . 6	0 . 2 . 9 . 4 . 9
21 . 0	0 . 2 . 11 . 0 . 7
21 . 6	0 . 3 . 0 . 9 . 2
22 . 0	0 . 3 . 2 . 6 . 0
22 . 6	0 . 3 . 4 . 3 . 2

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
23 . 0	0 . 3 . 6 . 0 . 10
23 . 6	0 . 3 . 7 . 11 . 1
24 . 0	0 . 3 . 9 . 9 . 9
24 . 6	0 . 3 . 11 . 8 . 10
25 . 0	0 . 4 . 1 . 8 . 6
25 . 6	0 . 4 . 3 . 8 . 8
26 . 0	0 . 4 . 5 . 9 . 3
26 . 6	0 . 4 . 7 . 10 . 3
27 . 0	0 . 4 . 9 . 11 . 10
27 . 6	0 . 5 . 0 . 1 . 10
28 . 0	0 . 5 . 2 . 4 . 3
28 . 6	0 . 5 . 4 . 7 . 3
29 . 0	0 . 5 . 6 . 10 . 8
29 . 6	0 . 5 . 9 . 9 . 2
30 . 0	0 . 5 . 11 . 7 . 0

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
30 . 6	1 . 0 . 1 . 11 . 11
31 . 0	1 . 0 . 4 . 5 . 3
31 . 6	1 . 0 . 6 . 11 . 1
32 . 0	1 . 0 . 9 . 5 . 5
32 . 6	1 . 1 . 0 . 0 . 2
33 . 0	1 . 1 . 2 . 8 . 6
33 . 6	1 . 1 . 5 . 3 . 2
34 . 0	1 . 1 . 7 . 11 . 4
34 . 6	1 . 1 . 10 . 8 . 1
35 . 0	1 . 2 . 1 . 5 . 3
35 . 6	1 . 2 . 4 . 2 . 11
36 . 0	1 . 2 . 7 . 1 . 0
36 . 6	1 . 2 . 9 . 11 . 8
37 . 0	1 . 3 . 0 . 10 . 9
37 . 6	1 . 3 . 3 . 10 . 3

Circonférence moyenne.		Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.				
Po.	Li.	TT.	TP.	Tp.	Tl.	Tpo.
38	0	1	3	6	10	4
38	6	1	3	9	10	10
39	0	1	4	0	11	9
39	6	1	4	4	1	3
40	0	1	4	7	3	9
40	6	1	4	10	6	7
41	0	1	5	1	8	6
41	6	1	5	4	11	11
42	0	1	5	8	3	9
42	6	1	5	11	8	0
43	0	2	0	3	0	9
43	6	2	0	6	6	8
44	0	2	0	10	0	2
44	6	2	1	1	6	3
45	0	2	1	5	0	10

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
45 . 6	2 . 1 . 8 . 8 . 0
46 . 0	2 . 2 . 0 . 3 . 8
46 . 6	2 . 2 . 3 . 11 . 10
47 . 0	2 . 2 . 7 . 8 . 5
47 . 6	2 . 2 . 11 . 5 . 6
48 . 0	2 . 3 . 3 . 3 . 2
48 . 6	2 . 3 . 7 . 1 . 2
49 . 0	2 . 3 . 10 . 11 . 5
49 . 6	2 . 4 . 2 . 10 . 7
50 . 0	2 . 4 . 6 . 9 . 10
50 . 6	2 . 4 . 10 . 9 . 11
51 . 0	2 . 5 . 2 . 10 . 8
51 . 6	2 . 5 . 6 . 11 . 6
52 . 0	2 . 5 . 11 . 0 . 11
52 . 6	3 . 0 . 3 . 2 . 10

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
53 . 0	3 . 0 . 7 . 5 . 1
53 . 6	3 . 0 . 11 . 7 . 11
54 . 0	3 . 1 . 3 . 11 . 2
54 . 6	3 . 1 . 8 . 3 . 2
55 . 0	3 . 2 . 0 . 7 . 5
55 . 6	3 . 2 . 5 . 0 . 2
56 . 0	3 . 2 . 9 . 5 . 3
56 . 6	3 . 3 . 1 . 11 . 0
57 . 0	3 . 3 . 6 . 5 . 2
57 . 6	3 . 3 . 10 . 11 . 9
58 . 0	3 . 4 . 3 . 6 . 11
58 . 6	3 . 4 . 8 . 2 . 6
59 . 0	3 . 5 . 0 . 10 . 7
59 . 6	3 . 5 . 5 . 7 . 3
60 . 0	3 . 5 . 10 . 4 . 3

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
60 . 6	4 . 0 . 3 . 1 . 7
61 . 0	4 . 0 . 7 . 11 . 11
61 . 6	4 . 1 . 0 . 11 . 11
62 . 0	4 . 1 . 5 . 10 . 8
62 . 6	4 . 1 . 10 . 9 . 9
63 . 0	4 . 2 . 3 . 9 . 11
63 . 6	4 . 2 . 8 . 8 . 2
64 . 0	4 . 3 . 1 . 9 . 7
64 . 6	4 . 3 . 6 . 7 . 10
65 . 0	4 . 4 . 0 . 0 . 3
65 . 6	4 . 4 . 5 . 5 . 3
66 . 0	4 . 4 . 10 . 5 . 0
66 . 6	4 . 5 . 3 . 11 . 0
67 . 0	4 . 5 . 9 . 2 . 7
67 . 6	5 . 0 . 2 . 7 . 1

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
68 . 0	5 . 0 . 7 . 8 . 3
68 . 6	5 . 1 . 1 . 4 . 2
69 . 0	5 . 1 . 6 . 10 . 5
69 . 6	5 . 2 . 0 . 4 . 6
70 . 0	5 . 2 . 5 . 11 . 1
70 . 6	5 . 2 . 11 . 6 . 2
71 . 0	5 . 3 . 5 . 1 . 9
71 . 6	5 . 3 . 10 . 9 . 10
72 . 0	5 . 4 . 4 . 6 . 4
72 . 6	5 . 4 . 10 . 3 . 3
73 . 0	5 . 5 . 4 . 0 . 10
73 . 6	5 . 5 . 9 . 10 . 11
74 . 0	6 . 0 . 3 . 9 . 2
74 . 6	6 . 0 . 9 . 8 . 2
75 . 0	6 . 1 . 3 . 7 . 5

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
75 . 6	6 . 1 . 9 . 7 . 4
76 . 0	6 . 2 . 3 . 7 . 8
76 . 6	6 . 2 . 9 . 8 . 6
77 . 0	6 . 3 . 3 . 9 . 8
77 . 6	6 . 3 . 9 . 11 . 7
78 . 0	6 . 4 . 4 . 1 . 9
78 . 6	6 . 4 . 10 . 4 . 6
79 . 0	6 . 5 . 4 . 7 . 8
79 . 6	6 . 5 . 10 . 11 . 4
80 . 0	7 . 0 . 5 . 3 . 4
80 . 6	7 . 0 . 11 . 8 . 2
81 . 0	7 . 1 . 6 . 1 . 3
81 . 6	7 . 2 . 0 . 6 . 10
82 . 0	7 . 2 . 7 . 1 . 2
82 . 6	7 . 3 . 1 . 7 . 6

Circonférence moyenne.		Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.				
Po.	Li.	TT.	TP.	Tp.	Tl.	Tpo.
83	0	7	3	8	2	5
83	6	7	4	2	10	0
84	0	7	4	9	6	4
84	6	7	5	4	2	5
85	0	7	5	10	11	4
85	6	8	0	5	8	9
86	0	8	1	0	6	8
86	6	8	1	7	5	0
87	0	8	2	2	3	10
87	6	8	2	9	3	2
88	0	8	3	4	2	11
88	6	8	3	11	3	2
89	0	8	4	6	3	11
89	6	8	5	1	5	3
90	0	8	5	8	6	11

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
90 . 6	9 . 0 . 3 . 9 . 1
91 . 0	9 . 0 . 10 . 11 . 9
91 . 6	9 . 1 . 6 . 2 . 11
92 . 0	9 . 2 . 1 . 6 . 8
92 . 6	9 . 2 . 8 . 10 . 7
93 . 0	9 . 3 . 4 . 3 . 1
93 . 6	9 . 3 . 11 . 8 . 2
94 . 0	9 . 4 . 7 . 1 . 8
94 . 6	9 . 5 . 2 . 7 . 9
95 . 0	9 . 5 . 10 . 5 . 0
95 . 6	10 . 0 . 5 . 9 . 1
96 . 0	10 . 1 . 1 . 7 . 3
96 . 6	10 . 1 . 9 . 0 . 3
97 . 0	10 . 2 . 4 . 9 . 7
97 . 6	10 . 3 . 0 . 6 . 0

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, confidéré foixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
98 . 0	10 . 3 . 8 . 3 . 4
98 . 6	10 . 4 . 4 . 1 . 6
99 . 0	10 . 4 . 11 . 11 . 8
99 . 6	10 . 5 . 7 . 9 . 10
100 . 0	11 . 0 . 3 . 7 . 2
100 . 6	11 . 0 . 11 . 9 . 8
101 . 0	11 . 1 . 8 . 1 . 11
101 . 6	11 . 2 . 3 . 9 . 6
102 . 0	11 . 2 . 11 . 11 . 1
102 . 6	11 . 3 . 8 . 0 . 9
103 . 0	11 . 4 . 4 . 6 . 8
103 . 6	11 . 5 . 0 . 5 . 9
104 . 0	11 . 5 . 8 . 8 . 3
104 . 6	12 . 0 . 4 . 2 . 11
105 . 0	12 . 1 . 1 . 3 . 10

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante - douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
105 . 6	12 . 1 . 9 . 8 . 11
106 . 0	12 . 2 . 6 . 2 . 10
106 . 6	12 . 3 . 2 . 9 . 8
107 . 0	12 . 3 . 11 . 1 . 0
107 . 6	12 . 4 . 7 . 7 . 0
108 . 0	12 . 5 . 6 . 2 . 10
108 . 6	13 . 0 . 0 . 9 . 6
109 . 0	13 . 0 . 9 . 5 . 2
109 . 6	13 . 1 . 6 . 1 . 8
110 . 0	13 . 2 . 2 . 10 . 3
110 . 6	13 . 2 . 11 . 7 . 8
111 . 0	13 . 3 . 8 . 6 . 9
111 . 6	13 . 4 . 5 . 11 . 1
112 . 0	13 . 5 . 2 . 2 . 5
112 . 6	13 . 5 . 11 . 1 . 7

Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo
113 . 0	14 . 0 . 8 . 1 . 7
113 . 6	14 . 1 . 5 . 1 . 7
114 . 0	14 . 2 . 2 . 2 . 5
114 . 6	14 . 2 . 11 . 3 . 4
115 . 0	14 . 3 . 8 . 5 . 1
115 . 6	14 . 4 . 5 . 6 . 9
116 . 0	14 . 5 . 2 . 9 . 4
116 . 6	15 . 0 . 0 . 0 . 10
117 . 0	15 . 0 . 9 . 4 . 3
117 . 6	15 . 1 . 6 . 7 . 9
118 . 0	15 . 2 . 4 . 0 . 11
118 . 6	15 . 3 . 1 . 5 . 3
119 . 0	15 . 3 . 10 . 10 . 5
119 . 6	15 . 4 . 8 . 4 . 6
120 . 0	15 . 5 . 5 . 11 . 5

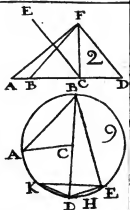
Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
120 . 6	16 . 0 . 3 . 5 . 5
121 . 0	16 . 1 . 0 . 11 . 6
121 . 6	16 . 1 . 10 . 9 . 0
122 . 0	16 . 2 . 8 . 4 . 9
122 . 6	16 . 3 . 6 . 1 . 5
123 . 0	16 . 4 . 3 . 10 . 11
123 . 6	16 . 5 . 1 . 8 . 5
124 . 0	16 . 5 . 11 . 6 . 9
124 . 6	17 . 0 . 9 . 5 . 2
125 . 0	17 . 1 . 7 . 4 . 4
125 . 6	17 . 2 . 5 . 4 . 6
126 . 0	17 . 3 . 3 . 4 . 7
126 . 6	17 . 4 . 1 . 4 . 8
127 . 0	17 . 4 . 11 . 8 . 3
127 . 6	17 . 5 . 9 . 7 . 5

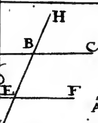
Circonférence moyenne.	Surface du Cercle moyen, considéré soixante-douze fois plus grand.
Po. Li.	TT. TP. Tp. Tl. Tpo.
128 . 0	18 . 0 . 7 . 9 . 3
128 . 6	18 . 1 . 6 . 0 . 0
129 . 0	18 . 2 . 4 . 2 . 8
129 . 6	18 . 3 . 2 . 6 . 2
130 . 0	18 . 4 . 0 . 9 . 8

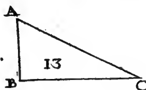
FIN.

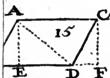


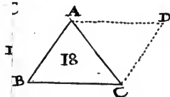
A. *Planche 1.*

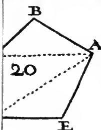

E
F
2
A
B
C
D
B
9
A
C
K
D
H
E

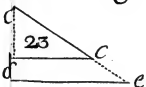

H
B
C
E
F

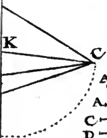

B
7
A
D
C

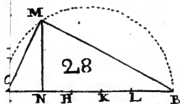

A
C
15
E
D
F


A
13
B
C


B
A
20
E


A
D
18
B
C


K
C
A
A
C
D


23
c
d
e
M
28
N
H
K
L
B


B
A
M
31
C




NAPOLI

Planche 3.

